

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Madame Monique LEVY-NAHAS

1^{re} THÈSE : SUR LES DÉFORMATIONS ET CONTRACTIONS D'ALGÈBRES DE LIE ET DE LEURS REPRÉSENTATIONS.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 Juin 1969 devant la commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. DIXMIER

J. LASCOUX

L. MICHEL

} Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Madame Monique LEVY-NAHAS

1^{re} THÈSE : SUR LES DÉFORMATIONS ET CONTRACTIONS D'ALGÈBRES DE LIE ET DE LEURS REPRÉSENTATIONS.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 Juin 1969 devant la commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. DIXMIER

J. LASCOUX

L. MICHEL

} Examineurs

THESIS

PRESENTED

TO THE FACULTY OF SCIENCES

OF THE UNIVERSITY OF TORONTO

FOR DEGREE

OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN PHYSICS

BY

LEONARD J. LEVY



REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur François Lurçat d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, et Monsieur le Professeur Jacques Dixmier d'avoir accepté d'en faire partie.

L'occasion de faire de la physique mathématique m'a été fournie par le Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique. Pour les excellentes conditions de travail et l'atmosphère amicale que j'y ai trouvés, j'ai plaisir à remercier tous ses membres, et particulièrement : Louis Michel, Dimitri Fotiadi et Jean Lascoux, ses directeurs et promoteurs, ainsi que Amithaba Chakrabarti, Gérard Fuchs, Pierre Renouard et Roland Sénéor, auxquels s'est ajoutée, pendant trop peu de temps malheureusement, Madame Viorica Florescu.

J'aimerais remercier également tout le secrétariat et le centre de reproduction du Centre de Physique Théorique : Madame Andalo, Monsieur Cornet et Mademoiselle Poudérous, qui, par leur travail et leur dévouement, ont contribué efficacement à une organisation générale dont j'ai fortement bénéficié.

La présence d'un centre de mathématique voisin s'est révélée également très fructueuse ; je tiens à remercier ici tout particulièrement Michèle Vergne dont l'intérêt constant et la compétence m'ont été très précieux.

Enfin ce travail, dont une grande partie résulte de la collaboration et de discussions avec tous les chercheurs mentionnés précédemment, n'aurait sans doute pas été possible sans la curiosité et les connaissances, à juste titre proverbiales, de Jean Lascoux ; les résultats présentés ici ne recouvrent qu'une faible partie de tous les problèmes qu'il m'a constamment suggérés...



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552216_0010

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
REMERCIEMENTS	112
INTRODUCTION	I à VIII
P R E M I E R E P A R T I E :	
DEFORMATIONS ET CONTRACTIONS D'ALGEBRES DE LIE	
0 - Préliminaires sur les ensembles algébriques	1
I - La variété des algèbres de Lie L_n	9
II - Définition géométrique de la déformation d'algèbres de Lie	17
III - Théorème de rigidité géométrique	27
IV - Déformations formelles	37
V - Comparaison entre la rigidité formelle et la rigidité géométrique : un théorème d'Artin	51
VI - Contraction d'algèbres de Lie	
1. Contraction de Saletan et déformation	58
2. Contractions plus singulières	62
3. D'autres contractions	82
4. Déformation, spécialisation et contraction	88
5. Quelques résultats généraux sur les contractions et les déformations	90
VII - L'exemple des algèbres de Lie de dimension 3	95
VIII - Quelques propriétés des produits semi-directs	113
IX - Application aux groupes (pseudo) orthogonaux inhomogènes	119
X - Déformations de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée	129

DEUXIEME PARTIE

DEFORMATIONS SIMULTANEEES D'ALGEBRES ET DE REPRESENTATIONS

XI	- Déformation des representations	149
XII	- Contraction d'une représentation	169
XIII	- First order deformation of Lie algebra representations, E(3) and Poincaré examples (Reports des Commun. math. Phys.)	184bis (242-266)
XIV	- Un cas particulier de déformations de representations au premier ordre : les dérivées de Lie généralisées.	185
XV	- Remarques sur l'intégrabilité des représentations déformées	201

TROISIEME PARTIE

QUELQUES APPLICATIONS

XVI	- Application à la recherche de relations entre les symétries internes et le groupes de Poincaré	207
XVII	- Remarques sur l'opérateur position	215
XVIII	- Déformation dépendant de deux paramètres, construction d'un groupe dynamique	221

APPENDICE	227
-----------	-----

REFERENCES	231
------------	-----

XIX	- Finite-dimensional representation of some non- semisimple Lie algebras (Reports du J. M. P.)	237 (980-988)
-----	--	------------------

INTRODUCTION

Depuis quelques années, avec le succès et la vogue rencontrés par certaines applications de la théorie des groupes en physique ($SU(3)$, $SU(6)$, les algèbres de courant, les symétries brisées...), on assiste à une croissance considérable du nombre des travaux liés à l'utilisation des algèbres et des groupes de Lie en physique.

Que, dans ces conditions, les notions d'algèbres de Lie voisines ou limites puissent se révéler intéressantes, n'a rien de surprenant ; de façon plus ou moins implicite, elles sont déjà présentes dans de nombreux cas.

Pour illustrer ces idées, on peut, par exemple, poser les questions suivantes :

- Il est connu depuis longtemps qu'à l'approximation non relativiste correspond un groupe de Lie d'invariance, le groupe de Galilée, qui est une limite du groupe de Poincaré quand $c \rightarrow \infty$. La relation correspondante entre algèbres de Lie est une contraction. Réciproquement, nous verrons que l'on peut considérer l'algèbre de Poincaré comme une "déformation" de celle de Galilée. On peut alors se demander s'il n'existe pas d'autres déformations de ces algèbres, susceptibles d'intervenir en physique, par exemple, pour décrire certains types de cinématique correspondant à un autre niveau d'ordre de grandeur pour les paramètres de déformations (analogues à $1/c$).

- Dans le domaine des symétries internes, citons seulement parmi beaucoup d'autres l'exemple suivant : on sait actuellement qu'il y a des difficultés pour décrire un système de particules par un groupe contenant celui de Poincaré et $SU(2)$. Une déformation de $P \times SU(3)$ a l'avantage de ne pas augmenter le nombre des paramètres (et donc n'introduit pas des objets difficilement interprétables, comme les translations de $SL(6, \mathbb{C})$). Il n'est pas a priori exclu qu'une telle déformation du produit ne puisse pas faire apparaître un couplage entre les 2 espaces, et par conséquent un spectre de masse.

On pourrait trouver beaucoup d'autres exemples, que ce soit dans le domaine des groupes de "non-invariance" (problème de l'atome d'hydrogène relativiste), des algèbres de courant. (Cf. R. Hermann) ou même encore à propos des résultats liés au formalisme de Toller. Tous ces exemples nous ont semblé justifier une étude systématique des propriétés de déformation et de contraction d'algèbres de Lie.

L'introduction de la notion de déformation est elle-même assez récente en mathématiques, puisque le point de vue algébrique fut développé pour la première fois (à notre connaissance) en 1964) par Gerstenhaber. Il a montré, en particulier, comment des groupes de cohomologie intervenait de façon naturelle dans la description des déformations d'anneaux et d'algèbres. [G1]

Dans notre premier article [LN1], nous insistions surtout sur la signification géométrique et intuitive de ces notions, et nous répondions au problème de trouver les déformations de l'algèbre de Poincaré, en montrant que les seules possibles correspondent aux algèbres des groupes de De Sitter $O(3,2)$ et $O(4,1)$. C'est ce que nous reprendrons dans la première partie de cette thèse (Ch.II et III) mais en ajoutant les principaux résultats qui ont été trouvé depuis dans ce domaine, particulièrement par Nijenhuis et Richardson. Dans la deuxième partie, nous étendrons des résultats de Gerstenhaber à la déformation couplée d'algèbres et de représentations et calculerons des exemples. Cette partie repose principalement sur les références [LN2] et [SLN]^(*)

Une série d'articles de R. Hermann, parue également ces dernières années, aborde la théorie des déformations dans une optique assez semblable à la nôtre, et présente de grandes analogies avec les résultats que nous exposons. Si certains sujets développés ici ne figurent pas ou très brièvement dans ces articles (par exemple ceux concernant les contractions), on y trouvera d'autres résultats et des suggestions que nous n'avons pas du tout abordés, et qui offrent encore d'intéressantes perspectives de recherche (en particulier dans le domaine de la géométrie différentielle).

(*) [SLN] article reporté au chapitre XIII.

Résumé et principaux résultats

1ère partie : déformation et contraction d'algèbres de Lie

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur k . Une base étant choisie on identifie l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $V \times V$ dans V avec k^{n^3} . Soit L_n la variété algébrique définie dans k^{n^3} ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par les équations de Jacobi. Les algèbres de Lie équivalentes sous l'action du groupe linéaire $GL(V)$ forment des orbites de $GL(V)$ sur cette variété (Ch.I).

D'un point de vue géométrique, une déformation d'une algèbre μ est un chemin sur la variété, issu du point μ et contenu dans un voisinage de μ . L'étude des déformations revient donc à une étude locale de la variété L_n . Le vecteur tangent à un tel chemin est un cocycle de $Z^2(\mu, \mu)$, l'ensemble de ces vecteurs tangents que nous noterons $Z^{2int.c}(\mu, \mu)$, contenu dans $Z^2(\mu, \mu)$, représente "le cône des tangentes" au point μ . Quand la déformation est contenue dans l'orbite de μ , déformation "triviale", son vecteur tangent est un élément de $B^2(\mu, \mu)$. De plus, l'espace vectoriel $B^2(\mu, \mu)$ est le plan tangent en μ à l'orbite de μ . (μ est un point simple dans son orbite).

En général $Z^2(\mu, \mu)$, qui représente la variété linéaire tangente calculée à partir des équations de Jacobi, n'est pas le plan tangent à la variété L_n , mais le contient. Toutefois, quand $H^3(\mu, \mu) = 0$, $Z^2(\mu, \mu)$ est effectivement le plan tangent en μ , et le point μ est alors un point simple de L_n . (Ch.II).

On dira qu'une algèbre de Lie est rigide quand toutes ses déformations sont triviales. Une condition suffisante pour que l'algèbre μ soit rigide est que : $H^2(\mu, \mu) = 0$. Dans ce cas l'orbite de μ est un ouvert de L_n (pour la topologie de Zariski). De plus, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites telles que $H^2(\mu, \mu) = 0$.

En particulier, une algèbre semi-simple est rigide. C'est un point simple de la variété, et son orbite est dense dans la composante irréductible de L_n qui la contient. (topologie de Zariski). L'adhérence de l'orbite représente toutes les algèbres qui admettent cette algèbre semi-simple μ parmi leurs déformations (Ch.III).

Dans la première introduction faite par Gerstenhaber, une déformation de μ était une série formelle en t , redonnant μ pour $t = 0$. On obtient des théorèmes de même nature que les précédents en utilisant une notion d'équivalence formelle. Nous verrons que, grâce à un théorème d'Artin la rigidité formelle implique la rigidité géométrique (Ch.IV, V).

La notion usuelle de contraction est, d'un point de vue géométrique, un processus inverse de la déformation : contracter une algèbre μ , c'est tracer un chemin dans l'orbite de μ qui se termine dans l'adhérence de cette orbite, ce point s'appelle l'algèbre contractée. En considérant des chemins plus singuliers que ceux utilisés jusqu'à présent, nous introduirons une nouvelle classe d'algèbres contractées dites "singulières" dont nous étudierons quelques propriétés (Ch.VI). Nous verrons en particulier qu'elles sont nilpotentes. A la différence des résultats précédents, le sens géométrique des formules obtenues n'est pas très clair, et il semble que l'on devrait pouvoir comprendre plus complètement (et plus mathématiquement) la contraction. En particulier nous ne savons pas traiter les problèmes suivants :

1) expliciter la relation d'équivalence entre des chemins conduisant à des algèbres contractées équivalentes (en relation avec des problèmes d'éclatement).

2) classer les algèbres contractées les plus générales d'une algèbre de Lie donnée μ ou, ce qui revient au même, classer les différents sous-groupes H de $G = GL(V)$ stabilisant un point d'une orbite donnée qui s'identifie ensemblistement ainsi à G/H .

Pour illustrer les résultats précédents, nous donnerons une étude complète sur R de la variété L_3 . Sur C , nous verrons qu'elle est formée de deux composantes irréductibles de dimension 6 : l'une est l'adhérence de l'orbite de $SL(2, C)$, l'autre est l'adhérence d'une famille continue d'orbites correspondant à des algèbres résolubles ($A_5(\lambda)$). L'intersection de ces deux composantes est formée d'un nombre fini d'orbites qui forment aussi toute l'adhérence de l'orbite semi-simple (Ch. VII).

Nous donnerons ensuite quelques propriétés générales dans le cas de s produits semi-directs (Ch.VIII).

Ces résultats s'appliquent aux algèbres $IO(p, q)$, algèbres des groupes pseudo-orthogonaux inhomogènes, par lesquelles on a en plus le résultat suivant : ce sont des points simples de la variété $L_{n(n+1)/2, n = p+q}$. Elles n'admettent qu'une sorte de déformations, dans les algèbres semi-simples $O(p+1, q)$ et $O(p, q+1)$. Leur orbite est de codimension 1 dans la composante irréductibles de la variété à laquelle elles appartiennent. Ces résultats sont donc en particulier vrai pour l'algèbre du groupe de Poincaré (Ch.IX).

Nous étudions ensuite la déformation de l'algèbre de Galilée. Parmi les algèbres obtenues, certaines sont susceptibles de décrire des cinématiques possibles comme l'on montré H. Bacry et J.M. Lévy-Leblond : on trouve en particulier les algèbres qu'ils ont appelé "de Newton", intermédiaires en ce sens entre les algèbres de Galilée et de De Sitter qui peuvent décrire un espace courbe non-relativiste (Ch.X).

2ème partie : déformations simultanées d'algèbre et de représentations

Soit (μ, φ) un couple formé d'une algèbre de Lie μ et d'une représentation φ . Une déformation peut être considéré soit de façon géométrique, comme un chemin dans un certain voisinage de ce couple, soit de façon formelle comme un ensemble de deux séries formelles (μ_t, φ_t) vérifiant les relations de Jacobi :

$$\sum_{\varrho(x,y,z)} \mu_t(\mu_t(x,y), z) = 0,$$

et
$$\varphi_t(\mu_t(x,y)) = [\varphi_t(x), \varphi_t(y)] \quad \forall x, y$$

On peut alors montrer que si l'on a pu construire jusqu'à l'ordre $(n-1)$ une telle déformation, l'obstruction à l'ordre n est caractérisée par les deux groupes de cohomologie

$$H^3(\mu, \mu) \text{ et } H^2(\mu, L(W)^\varphi)$$

où W est l'espace de la représentation φ , et où $L(W)$ est muni de la structure de μ -module canonique correspondante :

$$A \in L(W) \rightarrow x.A = [\varphi(x), A]_{L(W)} \quad x \in \mu$$

Après avoir défini l'équivalence de deux couples, on sait définir de la même façon que dans la 1ère partie ce qu'est une déformation triviale et un couple rigide. On a alors le théorème :

Si $H^2(\mu, \mu) = 0$ et $H^1(\mu, L(W)^\varphi) = 0$, le couple (μ, φ) est rigide (au sens formel).

Quand W est de dimension finie, ceci entraîne la rigidité géométrique. (Ch.XI).

Nous examinerons ensuite la réciproque, c'est-à-dire la contraction simultanée d'une algèbre et d'une représentation. Quand la représentation est de dimension finie, on retrouve le processus de Saletan pour "sauver" une représentation, et nous montrons sur un exemple comment de telles représentations contractées s'introduisent en physique (cas d'une particule de masse nulle) (Ch.XII).

Nous donnons ensuite l'exemple des déformations de représentations de l'algèbre $E(3)$ et de Poincaré, au premier ordre, retrouvant en particulier la "formule de Gell-Mann" comme seule solution. Les groupes de cohomologie qui interviennent $H^1(\mathfrak{P}, L(V))$ et $H^1(E(3), L(V))$ sont de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ quelle que soit la représentation, même de dimension infinie. (Ch.XIII).

Un exemple simple de déformations de représentations seules était connu depuis longtemps : il correspond à l'introduction d'un multiplicateur dans les représentations d'un groupe local de transformation sur une variété analytique. Dans ce cas, il y a une correspondance biunivoque entre le groupe $H^1(\mu, \mathfrak{U})$ ($\mathfrak{U}$ = espaces des fonctions analytiques au voisinage d'un point) et les déformations au premier ordre de représentations de l'algèbre μ par une dérivation D sur $\mathfrak{U}$, soit

$$\varphi_t = D + \phi$$

où ϕ est la multiplication par une fonction ϕ de $\mathfrak{U}$ (Ch.XIV).

Au chapitre XV, nous discutons brièvement le problème de l'intégrabilité des représentations déformées.

3ème partie : Quelques applications

Les seules déformations possibles de $\mathbb{P} \otimes \text{SU}(3)$ produit direct de l'algèbre de Poincaré par celle de $\text{SU}(3)$, sont des produits directs $\text{SO}(4,1) \otimes \text{SU}(3)$ ou $\text{SO}(3,2) \otimes \text{SU}(3)$, ce qui élimine l'espoir d'un couplage entre masse et nombres quantiques internes par ce procédé (Ch.XVI).

- Un autre exemple sera basé sur l'utilisation explicite de la déformation de l'algèbre de Galilée dans celle de Poincaré. Partons de l'opérateur position (multiplication par $\vec{x}$) non relativiste et essayons de construire un autre opérateur qui soit une déformation du précédent et qui ait des propriétés de covariance (contrairement à l'opérateur position relativiste usuel de Newton-Wigner). On s'aperçoit facilement :

- . qu'il existe une solution (d'ailleurs déjà connue)
- . que les composantes de l'opérateur obtenu ne commutent pas entre elles.

L'intérêt de ce calcul est de mettre clairement en évidence l'incompatibilité entre les propriétés de commutation et les propriétés de covariance pour un opérateur position relativiste (Ch. XVII).

- Enfin, nous discuterons une utilisation de la déformation de Galilée dans l'esprit des "groupes dynamiques" (Ch.XVIII).

Nous reproduisons un article avec C. George sur les représentations de dimension finie d'algèbres de Lie non semi-simples, dont nous utiliserons à la fois les résultats dans différents exemples (Ch.XII) et la méthode dans le calcul des groupes de cohomologie $H^1(\mu, L(V))$ (Ch.XIII).

P R E M I E R E P A R T I E

DEFORMATION ET CONTRACTION DES ALGEBRES DE LIE

0 - PRELIMINAIRES SUR LES ENSEMBLES ALGEBRIQUES

Nous ne donnons ici que les définitions et les propriétés les plus élémentaires. Pour approfondir la première partie de (01) à (05), on peut se reporter aux références suivantes :

- Bruhat [B] . Van der Waerden [VW] . Zariski. Samuel [ZS]

et en ce qui concerne les groupes algébriques, à :

- C. Chevalley [C]

Soit k un corps, et K une extension algébriquement close de k . On appelle A_n^k l'espace dont les points sont formés par des suites de n éléments $(x_1, \dots, x_n)$ notées aussi (x) , où $x_i \in K$.

Soit $R = k[X_1, \dots, X_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées, à coefficients dans k .

01. Variété algébrique affine *

Définition 1 : Une variété algébrique affine $\mathfrak{M}$ définie sur k , est l'ensemble des points (x) de A_n^k , qui sont les zéros de polynômes appartenant à R (dits polynômes de définition de $\mathfrak{M}$).

$\mathfrak{M}$ est également l'ensemble des zéros de l'idéal engendré dans R par les polynômes de définition.

Exemple : Une courbe algébrique plane, définie sur $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{C}^2$, est l'ensemble des zéros d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X, Y]$.

*
sauf mention du contraire, on emploiera le mot variété dans le sens de variété algébrique affine.

02. Idéal associé à un ensemble de A_n^k

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. Il lui correspond dans A_n^k une variété $V(\mathfrak{A})$, formée par l'ensemble des zéros des éléments de $\mathfrak{A}$.

Soit E un sous-ensemble de A_n^k . On lui associe dans l'anneau $R = k[X_1, \dots, X_n]$, un idéal $\mathfrak{I}(E)$, formé par l'ensemble de tous les polynômes qui s'annulent sur E .

Il est clair que la variété associée à $\mathfrak{I}(E)$ contient E :

$$V(\mathfrak{I}(E)) \supset E \quad (0.1)$$

et de même que :

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{A})) \supset \mathfrak{A} \quad (0.2)$$

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Rightarrow V(\mathfrak{A}) \supset V(\mathfrak{B}) \quad (0.3)$$

$$E \subset F \Rightarrow \mathfrak{I}(E) \supset \mathfrak{I}(F) \quad (0.4)$$

Les propriétés d'union et d'intersection s'échangent quand on passe des idéaux aux variétés :

$$V(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B}) \quad (0.5)$$

$$V\left(\sum_i \mathfrak{A}_i\right) = \bigcap_i V(\mathfrak{A}_i) \quad (0.6)$$

Enfin, une condition nécessaire et suffisante pour que E soit une variété algébrique, est que :

$$E = V(\mathfrak{I}(E)) \quad (0.7)$$

Une variété algébrique peut donc être définie par plusieurs idéaux différents. En particulier, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{A}))$ définissent la même variété.

Exemple : dans $C[X,Y]$, l'idéal $\mathfrak{U} = (x)$ et l'idéal $\mathfrak{U}^2 = (x^2)$ définissent ensemblistement la même variété (l'axe des y).

Définition 2 : On appelle radical de l'idéal $\mathfrak{U}$ inclus dans l'anneau R , et on note $\sqrt{\mathfrak{U}}$, l'ensemble des éléments $P \in R$, dont une puissance au moins (entière positive ou nulle) appartient à $\mathfrak{U}$.

$\mathfrak{U}$ et $\sqrt{\mathfrak{U}}$ définissent la même variété. Plus précisément, on a le théorème suivant :

$$\sqrt{\mathfrak{U}} = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{U})) \quad (0.8)$$

qui est équivalent au théorème des zéros de Hilbert.

La propriété duale de (0.7) pour les idéaux s'écrit :

$$\mathfrak{U} \text{ est de la forme } \mathfrak{I}(E) \Leftrightarrow \mathfrak{I}(V(\mathfrak{U})) = \mathfrak{U}$$

Donc, tout idéal de la forme $\mathfrak{I}(E)$ est égal à son radical.

03. Topologie de Zariski

D'après (0.4) et (0.5), toute intersection, toute union finie de variétés algébriques est une variété algébrique.

$$\begin{aligned} \text{Les propriétés : } \quad V(0) &= A_n^k \\ V(k[X_1 \dots X_n]) &= \emptyset \end{aligned}$$

montrent que l'on peut définir dans A_n^k une topologie dont les ensembles fermés sont les variétés algébriques définies sur k : c'est la topologie de Zariski.

Dans le cas où $K = C$, toute variété algébrique est évidemment fermée pour la topologie naturelle de A_n^k . La topologie de Zariski est

moins fine que la topologie naturelle .

Fermeture d'un sous-ensemble E de A_n^k

C'est la plus petite variété algébrique contenant E. On voit facilement que toute variété algébrique contenant E, contient $V(\mathfrak{I}(E))$, la fermeture de E est donc $V(\mathfrak{I}(E))$.

En particulier, prenons pour E un point (x) de A_n^k . L'idéal $\mathfrak{I}(x)$ est l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1 \dots X_n]$ s'annulant en x. La fermeture $\{\bar{x}\}$ est donc l'ensemble des points x' tels que $\forall P \in \mathfrak{I}(x)$, on ait $P(x') = 0$. Un tel point x' s'appelle une spécialisation de x (relativement au corps k).

Il est clair que $\mathfrak{I}(x) \subset \mathfrak{I}(x')$ pour toute spécialisation x' de x.

Point générique d'une variété :

Soit $\mathfrak{M}$ une variété algébrique, $\mathfrak{I}(\mathfrak{M})$ l'idéal associé. $(x) \in \mathfrak{M}$ est un point générique de $\mathfrak{M}$, si $\forall P \in k[X_1 \dots X_n]$, tel que $P(x) = 0$, alors $P \in \mathfrak{I}(\mathfrak{M})$. (La définition d'un point générique est relative au corps de définition de la variété).

04. Variété irréductible

Une variété (algébrique) qui ne peut pas se représenter comme l'union de deux sous-variétés propres est dite irréductible.

Donc E irréductible $\Leftrightarrow$ si $E = F_1 \cup F_2$, F_1 et F_2 étant deux fermés, $\Rightarrow E = F_1$ ou $E = F_2$.

En particulier, cette définition implique que E est connexe (mais la réciproque est fausse).

Quelques propriétés des variétés irréductibles :

- Il y a équivalence entre :
 - . E est une variété irréductible
 - . tout ouvert (non vide) de E est dense dans E
 - . tout ouvert de E est connexe.
- Si la variété contient plus d'un point, la topologie n'est jamais séparée : l'intersection de deux ouverts non vides ne peut jamais être vide (on le voit en prenant le complémentaire).
- Toute variété irréductible E possède un point générique x et $E = \{\overline{x}\}$.

Propriétés des idéaux associés

L'idéal de définition est irréductible : il n'est pas l'intersection de deux idéaux qui le contiennent strictement.

Sur un anneau noéthérien (ce qui est le cas de l'anneau $k[X_1 \dots X_n]$), tout idéal irréductible est primaire : si $a \cdot b \in \mathfrak{U}$ et $a \notin \mathfrak{U}$, $\exists m$ entier (≥ 1) tel que $b^m \in \mathfrak{U}$.

Dans ce cas, le radical de $\mathfrak{U}$ est premier (même définition, avec $m = 1$) Donc, si E est une variété irréductible, l'idéal associé $\mathfrak{J}(E)$ est premier (et réciproquement)..

Dimension d'une variété irréductible

Soit $\mathfrak{J}(E)$ l'idéal premier associé à la variété irréductible E. La dimension de E est le degré de transcendance sur k, de l'algèbre affine associée à E : $\frac{k[X_1 \dots X_n]}{\mathfrak{J}(E)}$. (Cette définition correspond au nombre minimum de paramètres nécessaires pour décrire la variété). On dit aussi que c'est la dimension de l'idéal premier $\mathfrak{J}(E)$.

Théorème de décomposition de Lasker-Noether

Ce théorème dit que dans un anneau noetherien, tout idéal $\mathfrak{I}$ peut se mettre, d'une façon non redondante, sous forme d'une intersection finie d'idéaux premiers.

Si l'idéal est égal à son radical, tous les idéaux de cette décomposition sont premiers.

Il en résulte un théorème dual pour les variétés :
Toute variété algébrique $\mathfrak{M}$ est une union finie de variétés irréductibles $\mathfrak{M}_i$:

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{i=1}^h \mathfrak{M}_i$$

Si elle est non redondante, cette décomposition est unique.

06. Notion de groupe algébrique

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur k .
On désigne par $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{nd}} V$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V .
Le choix d'une base $(e_1 \dots e_n)$ dans V induit une base dans $\mathcal{E}$ formée des n^2 endomorphismes X_{ij} tels que tout élément $s \in \mathcal{E}$ se met sous la forme $\sum_{i,j=1}^n u_{ij}(s) X_{ij}$; l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathcal{E}$, s'identifie à l'algèbre des polynômes en u_{ij} : nous la notons $R(\mathcal{E})$.

On peut reprendre les définitions précédentes avec un espace $A_{n^2}^k = \mathcal{E}$, et une algèbre de polynômes $k[X_1 \dots X_{n^2}]$.

Définition 3 : Soit G un sous-groupe du groupe des automorphismes de V . S'il existe un ensemble S de fonctions polynômes sur $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{nd}} V$ tel que G soit composé de tous les automorphismes s de V , tels que $P(s) = 0$ pour tout $P \in S$, on dit que G est un groupe algébrique, et que S est un ensemble de définition de G .

De même que dans 02, on peut associer un idéal dans $R(\mathcal{E})$

toute partie E de $\mathcal{E}$: l'idéal $\mathfrak{J}(E)$ formé des fonctions polynômes qui s'annulent sur E .

Définition 4 : un groupe algébrique d'automorphismes de V est appelé irréductible si son idéal associé est premier (cf. 04).

Le théorème analogue au théorème de décomposition de Lasker (05) a ici la forme suivante :

Soit G un groupe algébrique d'automorphismes de l'espace vectoriel V . Il existe un sous-groupe algébrique G_1 de G et un seul qui est irréductible et d'indice fini dans G .

Le groupe G_1 est un sous-groupe distingué de G , on l'appelle la composante algébrique de l'élément neutre dans G , et les classes de G suivant G_1 s'appellent les composantes algébriques de G .

Si le corps k est celui des réels ou des complexes, la composante algébrique G_1 de l'élément neutre dans G contient la composante connexe G_0 de l'élément neutre dans G (au sens de la topologie naturelle de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$).

(Remarque : au sens de la topologie de Zariski, G_1 est toujours connexe)

Si k est le corps des réels, on peut avoir $G_1 \neq G_0$. Par exemple dans le cas $G = GL(V)$, $GL(V)$ est irréductible (l'idéal associé est l'idéal nul), et G_0 est l'ensemble des endomorphismes de déterminant > 0 .*

Si k est le corps des nombres complexes, on a toujours $G_0 = G_1$.

* L'application déterminant n'est pas continue pour la topologie de Zariski sur G et la topologie naturelle sur k .

I - LA VARIETE DES ALGEBRES DE LIE L_n

1. Définition de L_n

Définition 1 : Une algèbre de Lie sur k , est un couple (μ, V) formé d'un espace vectoriel V sur k , et d'une application bilinéaire et antisymétrique μ de $V \times V$ dans V , qui vérifie les équations de Jacobi :

$$\sum_{\substack{\Sigma \\ P(x,y,z)}} \mu(\mu(x,y), z) = 0 \quad \forall x, y, z \in V \quad (I.1)$$

$P(x,y,z)$ signifie qu'il faut sommer sur les permutations circulaires de (x,y,z) .

[En général, nous noterons μ l'algèbre de Lie (μ, V)]

Les isomorphismes standards suivants permettent d'obtenir une représentation paramétrique de l'ensemble des algèbres de Lie d'une dimension n fixée.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps k qui sera toujours celui des nombres réels $\mathbb{R}$, ou complexes $\mathbb{C}$. Notons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de V , toute application bilinéaire B de $V \times V$ dans V est déterminée par ses valeurs sur les éléments de base :

$$B(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k$$

La donnée d'une base dans V définit ainsi une bijection de l'ensemble des applications bilinéaires $L(V \times V, V)$ dans l'espace k^{n^3} par :

$$B \in L(V \times V, V) \rightarrow (C_{ij}^k) \in k^{n^3} \quad i, j, k : 1, \dots, n$$

De la même façon, la donnée d'une base dans V définit une bijection entre l'espace des applications bilinéaires et antisymétriques $L(V \wedge V, V)$ et l'espace $k^{n^2(n-1)/2}$

$$\mu \in L(V \wedge V, V) \rightarrow c_{ij}^k \in k^{n^2(n-1)/2}$$

$$\text{avec } c_{ij}^k = -c_{ji}^k$$

Le choix d'une base dans V permet donc de représenter une algèbre de Lie par un point de k^{n^3} . Les composantes c_{ij}^k s'appellent les constantes de structure de l'algèbre de Lie. Elles vérifient les relations d'antisymétrie et les relations de Jacobi :

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (I,2)$$

$$\sum_{P(i,j,k)} c_{ij}^l c_{lk}^m = 0 \quad (I,3)$$

(somme sur l'indice l)

Ces équations sont polynomiales. Elles définissent dans k^{n^3} une variété algébrique L_n , qui est un cône (équations homogènes). Dans la suite, on utilisera la même notation pour désigner une algèbre de Lie ou le point qui lui correspond sur L_n dans l'isomorphisme précédent.

Le groupe $G = GL(V)$ des applications linéaires et régulières de V dans V , opère sur "la variété des algèbres de Lie L_n " de la façon suivante :

$$\varphi \in GL(V) \rightarrow \varphi.\mu \in L_n$$

avec :

$$(\varphi.\mu)(x,y) = \varphi.\mu(\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}y) \quad x,y \in V \quad (I,4)$$

Définition 2 : L'algèbre $\mu' = \varphi.\mu$ est dite isomorphe à μ .

La formule (I.4) signifie encore que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & V \times V & \xrightarrow{\mu} & V \\ \varphi \times \varphi & \downarrow & & & \downarrow \varphi \\ & & V \times V & \xrightarrow{\mu'} & V \end{array}$$

Une base étant choisie dans V , les éléments de G se représentent de façon canonique par des matrices (φ_i^j) . G opère alors sur les constantes de structure C_{ij}^k de la façon suivante : les constantes de structure de l'algèbre $\mu' = \varphi.\mu$ sont :

$$C_{ij}^k = \sum_{l,h,m} \varphi^{-1 l}_i \cdot \varphi^{-1 h}_j \cdot C_{lh}^m \varphi^k_m \quad (I.5)$$

Définition 3 : L'ensemble des algèbres isomorphes à l'algèbre de Lie μ s'appelle l'orbite de μ , et sera noté $O(\mu)$.

Pour $k = \mathbb{C}$, le groupe $GL(V)$ est connexe, et les orbites, images d'un ensemble connexe par une application continue, le sont aussi. Sur $\mathbb{R}$, elles peuvent être connexes ou non. (Pour la topologie induite par la topologie naturelle de k^{n^3}).

Une orbite est un ensemble irréductible de $L_n[V]$. En effet, l'application de $G \times L_n \rightarrow L_n$ définie par $(\varphi, \mu) \rightarrow \varphi.\mu$ est un morphisme (algébrique), et $O(\mu)$ est l'image par ce morphisme de l'ensemble irréductible $G \times \{\mu\}$.

Toute composante irréductible de la variété L_n est une réunion d'orbites.

Plutôt que la variété L_n elle-même, la structure réellement intéressante serait celle formée par les classes d'équivalence d'algèbres de Lie isomorphes. Toutefois, l'ensemble quotient que l'on obtient ainsi, ne possède pas une structure de variété algébrique, ni même de variété, en général, ce qui rend son étude beaucoup plus complexe. Nous verrons d'autre part que "la variété des algèbres de Lie"

L_n convient assez bien pour donner une illustration géométrique de l'étude des déformations et des contractions d'algèbres de Lie. Pour ces raisons, nous nous servons dans la suite de la variété algébrique L_n pour représenter les algèbres de Lie de dimension n . Plus précisément, nous nous intéresserons à l'ensemble $(L_n, GL(V))$: ainsi un point μ de L_n représentera en général l'ensemble d'une algèbre de Lie et de ses automorphismes.

2. Géographie de L_n

Les propriétés générales de la variété L_n , et de l'idéal de définition (I.5) formé par les équations de Jacobi, sont encore peu connues. (En particulier, on ne sait pas si $J = \sqrt{J}$). Les premières études sont dues à Rajaona ^[R] et Michèle Vergne ^[V]. Les résultats qui nous concernent le plus sont :

- la description d'ensembles fermés dans L_n pour la topologie de Zariski.

- l'analyse de la réductibilité de L_n . Nous en donnons un rapide résumé dans la suite.

A) Quelques ensembles fermés dans L_n , pour la topologie de Zariski.

Les ensembles fermés pour la topologie de Zariski ont l'intérêt d'être "stables" par contraction, comme on le verra plus loin, alors que les ensembles ouverts seront "stables" par déformation.

On obtient facilement des ensembles fermés intéressants de L_n , en annulant d'autres polynômes en plus de ceux de Jacobi.

Donnons quelques exemples :

- (a) - L'ensemble des algèbres de Lie unimodulaires U_n est un sous-cône fermé de L_n .

Soit $e_i \rightarrow \text{ad } e_i$ la représentation adjointe de l'algèbre μ , définie par $\text{ad } e_i \cdot x = \mu(e_i, x) \quad \forall x \in V$. Les algèbres unimodulaires sont définies par la condition que la représentation adjointe soit de trace nulle, soit :

$$\sum_i C_{ij}^i = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

ce qui est une équation linéaire et homogène.

(b) - L'ensemble des algèbres de Lie non semi-simples $N S_n$ est un sous-cône fermé de L_n .

Soit β la forme de Killing définie par :

$$\beta(e_i, e_j) = \text{tr}(\text{ad } e_i \cdot \text{ad } e_j) \quad e_i, e_j \in V$$

D'après le critère de Cartan, pour qu'une algèbre de Lie soit semi-simple, il faut et il suffit que sa forme de Killing soit non dégénérée, ce qui revient à demander que le déterminant de la matrice associée à β soit non nul. Les algèbres non semi-simples sont donc définies par la condition polynomiale suivante :

$$\det(\beta_{ij}) = 0$$

Il en résulte que l'ensemble S_n des algèbres de Lie semi-simples est un ouvert de L_n .

(c) - L'ensemble des points μ de L_n tels que :

$$\dim \mathfrak{C}^i(\mu) \leq p$$

est un fermé de L_n .

$\mathfrak{C}^i(\mu)$ est le $(i + 1)^{\text{ième}}$ élément de la suite centrale descendante :

$$\mathfrak{C}^0(\mu) = V, \quad \mathfrak{C}^i(\mu) = \mu(V, \mathfrak{C}^{i-1}(\mu))$$

En particulier pour $i = 1$, l'ensemble des algèbres de Lie μ dont la dimension de l'algèbre dérivée $\mathfrak{D}^1(\mu) = \mu(V, V)$ est inférieure ou égale à p , est un fermé de L_n .

On appellera M_n l'ensemble des algèbres $\mu \in L$, telles que $\mathfrak{D}^1(\mu) \neq \mu$. M_n est un sous-cône fermé de L_n .

(d) - L'ensemble des points μ de L_n tels que $\dim \mathfrak{D}^j(\mu) \leq q$ est un fermé de L_n .

$\mathfrak{D}^j(\mu)$ = élément de la suite des algèbres dérivées définies par

$$\mathfrak{D}^0(\mu) = V, \quad \mathfrak{D}^j(\mu) = \mu(\mathfrak{D}^{j-1}(\mu), \mathfrak{D}^{j-1}(\mu)) \quad j > 0$$

(e) - L'ensemble des points μ de L_n tels que $\dim C_k(\mu) \geq r$ est un fermé de L_n , où $C_k(\mu)$ est un terme de la suite centrale ascendante :

$$C_0(\mu) = \{0\} \quad C_k(\mu) = \{x \in V \ ; \ \mu(x, V) \in C_{k-1}(\mu)\}$$

(f) - L'ensemble R_n des algèbres de Lie résolubles est un sous-cône fermé de L_n .

(g) - L'ensemble N_n des algèbres de Lie nilpotentes est un sous-cône fermé de L_n .

On trouvera la démonstration de (f) et (g) dans [R], et de (c), (d) et (e) dans [V].

B) Résultats sur la réductibilité

Rappelons que :

U_n = ensemble des algèbres de Lie unimodulaires

M_n = ensemble des algèbres de Lie μ telles que $\mathfrak{D}^1 \mu \neq \mu$
 NS_n = Algèbres de Lie non semi-simples.

Le résultat suivant est démontré dans [R]

Réductibilité de L_n

Théorème :

- a) $L_n = U_n \cup M_n$
- b) $L_n = U_n \cup NS_n$
- c) $L_n \neq M_n$ sauf pour $n = 1, 2, 4$
- d) $L_n \neq U_n$ sauf pour $n = 1$
- e) $L_n \neq NS_n$ sauf pour $n = 1, 2, 4, 5, 7$

En définitive, on montre que : sauf pour $n = 1$, où il est réduit à un point, et pour $n = 2$, où c'est un plan, le cône L_n est réductible.

Réductibilité de R_n et de N_n (Résultats sur la dimension de L_n)

Pour $n \leq 4$, l'ensemble des algèbres de Lie résolubles est irréductible [R].

Pour $n \leq 7$, les ensembles d'algèbres de Lie nilpotentes N_n sont irréductibles (cf. [V] pour le cas $n = 7$)

Enfin pour n assez grand, on trouvera dans [V] la démonstration de la réductibilité de N_n . Celle-ci se fait en montrant l'existence d'une composante irréductible de N_n de dimension inférieure à n^2 , et d'une autre composante irréductible de dimension de l'ordre $\frac{2n^3}{27}$.

Ce dernier résultat présente un autre intérêt : nous verrons plus loin que, si μ est une algèbre de Lie semi-simple, l'adhérence de

son orbite $\overline{0(\mu)}$ est une composante irréductible de la variété L_n , de dimension $n^2 - n$. On voit donc qu'il peut exister des composantes irréductibles de L_n , ne contenant pas d'algèbres semi-simples et de dimensions bien supérieures. (Ce fait n'apparaît pas pour les variétés de petite dimension L_3 ou L_4). Mentionnons ici l'exemple introduit par M. Vergne :

Exemple de haute dimension : il existe dans N_n , un fermé $F_{n,p}$, différent de N_n , irréductible, de dimension $\frac{p(n-p)(n-p+1)}{2}$ $0 \leq p \leq n - 2$.

Si $\mu \in F_{n,p}$, on peut trouver une base dans $V(x_1, x_2 \dots x_{n-p})$ $(y_1 \dots y_p)$ telle que :

$$\mu(x_i, y_j) = 0$$

$$\mu(y_i, y_j) = 0$$

$$\mu(x_i, x_j) = \sum_k C_{ij}^k y_k$$

Les équations de Jacobi sont automatiquement vérifiées, avec des constantes C_{ij}^k arbitraires, choisies dans un espace k^N , avec $N = \frac{p(n-p)(n-p+1)}{2}$

II - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA DEFORMATION D'ALGEBRES DE LIE

Soit μ une algèbre de Lie d'espace vectoriel sous-jacent V , dont nous noterons la loi par un crochet : $x, y \rightarrow [x, y]$. Il lui correspond un point de la variété L_n noté aussi μ .

Sauf mention explicite du contraire, la variété L_n est munie de la topologie induite par la topologie naturelle de k^n ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Définitions

Définition 1 : Une déformation de l'algèbre de Lie μ est un chemin différentiable sur la variété L_n , chemin d'origine μ , et contenu dans un voisinage de μ .

En d'autres termes, une déformation de l'algèbre de Lie μ est une application différentiable $t \rightarrow \mu_t$ de $\mathbb{R}$ dans L_n définie dans un domaine $t \leq t_0$, et telle que $\mu_0 = \mu$.

Nous nous intéresserons particulièrement aux déformations analytiques, c'est-à-dire aux déformations telles que μ_t dépende analytiquement de t (pour $t \leq t_0$).

Définition 2 : Une déformation de l'algèbre de Lie μ qui reste toujours dans l'orbite de μ , est dite "triviale".

Donc, μ_t est une déformation triviale si, dans son domaine de définition $t \leq t_0$, on a $\mu_t \in 0(\mu) \forall t$.

D'après ces définitions, l'étude des déformations est liée à une étude locale de la variété L_n . On peut préciser ce lien en regardant quelle est la signification des vecteurs tangents.

2. Vecteur tangent à une déformation

Par hypothèse, μ_t admet une dérivée par rapport à t . Soit μ_1 la dérivée de μ_t en $t = 0$. $\mu_1 \in L(V \wedge V, V)$. Elle correspond sur L_n au vecteur tangent au chemin μ_t donc aussi à un vecteur tangent à la variété L_n .

Les équations de Jacobi qui doivent être vérifiées par μ_t , pour toutes les valeurs de $t \leq t_0$, imposent certaines restrictions sur μ_1 . Il suffit de dériver :

$$\sum_{P(x,y,z)} \mu_t(\mu_t(x,y), z) = 0$$

on obtient (en utilisant la notation $[x,y]$ pour $\mu_0(x,y)$) :

$$\sum_{P(x,y,z)} \mu_1([x,y], z) + [\mu_1(x,y), z] = 0$$

ce qui signifie encore (cf. formule A 7 de l'appendice) :

$\delta\mu_1(x,y,z) = 0$ donc que :

$$\delta\mu_1 \in Z^2(\mu, \mu) \quad (\mu = \mu_0) \quad (II.2)$$

L'ensemble des vecteurs tangents correspondant à toutes les déformations (chemins) passant par μ , engendre nous appellerons : le cône des tangentes. au point μ , et que nous noterons $Z^2 \text{ int. } \mathfrak{C}(\mu, \mu).$ (*)

Ce cône peut ne pas être un espace vectoriel si μ est un point singulier de la variété L_n (singulier au sens différentiable)

L'interprétation de l'espace vectoriel $Z^2(\mu, \mu)$ est plus délicate, et exige l'introduction de quelques notions de géométrie algébrique.

(*) Cette définition est différente de la définition du cône des tangentes en géométrie algébrique.

3. L'espace $Z^2(\mu, \mu)$

Dans la suite, on notera $(x_i) \ i = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$ les constantes de structures (C_{ij}^k) de l'algèbre μ , et $(\xi_i) \ i = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$ un point courant de l'espace $L(V \wedge V, V)$ auquel correspondent les éléments (α_{ij}^k) .

Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal définissant la variété L_n (sur $k = R$ ou C) défini par l'ensemble des polynômes de Jacobi (P^1) .

A chaque polynôme $P \in \mathfrak{P}$, on associe la différentielle au point x , c'est-à-dire la forme linéaire à coefficients dans $k(x)$ définie par :

$$dP(x) (\xi) = \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \xi_i \quad (II.3)$$

On définit une variété linéaire associée à l'idéal $\mathfrak{P}$ passant par le point μ de coordonnées $(x) = (x_1, \dots, x_{\frac{n^2(n-1)}{2}})$ par l'ensemble des zéros des équations :

$$\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} (\xi_i - x_i) = 0 \quad (II.4)$$

Dans notre cas, les polynômes sont homogènes :

$$P^l (C_{ij}^k) = (\sum_{ijk} C_{ij}^m C_{mk}^l) \quad l = 1, \dots, n$$

L'équation (II.4) est donc équivalente au système d'équations $dP^l(x) (\xi) = 0$ et s'écrit : [en notant (α_{ij}^k) pour (ξ_i)] :

$$(\sum_{ijk} C_{ij}^m \alpha_{mk}^l + \alpha_{ij}^m C_{mk}^l) = 0 \quad (II.4')$$

C'est l'équation (II.1) exprimée à l'aide des composantes : ainsi les éléments (α_{ij}^k) solutions de ces équations sont les composants d'un cocycle de $Z^2(\mu, \mu)$.

$Z^2(\mu, \mu)$ est donc la variété linéaire définie par les équations (II.4). Si ρ est le rang de la matrice $(\frac{\delta P_1}{\delta x_i})$, sa dimension est $\frac{n^2(n-1)}{2} - \rho$. On l'appelle la variété linéaire associée aux équations de Jacobi : $T_P(\mu, V)$

Définition d'un point simple [W], [H-P]

Soit $\mathfrak{J}(\mathcal{V})$ l'idéal associé à la variété $\mathcal{V}$ (cf. 0.2). On peut construire de la même façon la variété linéaire associée à $\mathfrak{J}(\mathcal{V})$ en un point μ de $\mathcal{V}$, que l'on note $T(\mu, \mathcal{V})$ (μ et V fixés, cette variété est indépendante du corps k)

Définition 3 : Supposons que le point μ appartienne à une et une seule composante irréductible $\mathfrak{C}$ de la variété $\mathcal{V}$. Alors, on dira que μ est un point simple de la variété si

$$\dim \mathfrak{C} = \dim T(\mu, \mathcal{V})$$

A priori, l'idéal de Jacobi est contenu dans $\mathfrak{J}(L_n)$. Par conséquent (cf. 0.3) :

$$\dim T(\mu, L_n) \leq \dim Z^2(\mu, \mu)$$

Un point non simple est dit multiple. Pour tout point multiple μ appartenant à une composante irréductible et une seule $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{V}$, on a :

$$\dim \mathfrak{C} < \dim T(\mu, \mathcal{V}) , \text{ et donc a fortiori :}$$

$$\dim \mathfrak{C} < \dim Z^2(\mu, \mu).$$

Nous voyons donc qu'en général l'espace $Z^2(\mu, \mu)$ contient l'espace tangent géométrique, mais ne lui est pas égal.

4. Vecteur tangent à une déformation triviale

Soit $t \rightarrow \mu_t$ une déformation triviale de μ . C'est un chemin contenu dans l'orbite de μ : il lui correspond un chemin $t \rightarrow g_t$ dans $GL(V)$ tel que : $\mu_t = g_t * \mu$. Il est possible de choisir ce chemin $t \rightarrow g_t$ de telle sorte qu'il soit contenu dans un voisinage de l'identité dans $GL(V)$ et qu'il soit différentiable c'est-à-dire tel que :

$$\mu_t(x, y) = g_t \mu(g_t^{-1} x, g_t^{-1} y) = g_t [g_t^{-1} x, g_t^{-1} y] \quad (\text{II.5})$$

en notant toujours $[,]$ la loi μ .

Soit g_1 la dérivée de g_t au voisinage de $t = 0$. Le vecteur tangent au chemin μ_t s'obtient en dérivant la relation (II.5) :

$$\mu_1(x, y) = g_1 [x, y] - [g_1 x, y] - [x, g_1 y] \quad (\text{II.6})$$

Cette expression (cf. formule A 6) s'interprète en termes de cohomologie : elle signifie que $\mu_1(x, y) = -\delta g_1(x, y)$, est un cobord, pour le groupe de cohomologie défini par rapport à la représentation disjointe de μ :

$$\mu_1 \in B^2(\mu, \mu)$$

Contrairement à ce qui se passe pour $Z^2(\mu, \mu)$ dans le cas d'une déformation quelconque, il est facile de voir que l'espace vectoriel $B^2(\mu, \mu)$ correspond au plan tangent géométrique à l'orbite de μ au point μ . En effet, soit φ un élément quelconque de $B^2(\mu, \mu)$: $\varphi = \delta g$ où $g \in L(V, V)$. En considérant $\mu_t = e^{-tg} \mu$, on obtient une déformation de μ , dans l'orbite de μ ($\forall t$), telle que $\mu_1 = \varphi$, ce qui montre que à tout élément de $B^2(\mu, \mu)$ correspond un vecteur tangent à l'orbite (tout cobord est intégrable).

Application à la dimension de l'orbite $0(\mu)$

Il résulte de ce qui précède que l'orbite de μ est une variété dont chaque point est simple, c'est-à-dire que : $\dim 0(\mu) = \dim B^2(\mu, \mu)$

On aurait pu trouver ce résultat en identifiant $0(\mu)$ avec le quotient $GL(V)/\text{Aut}(\mu)$, où $\text{Aut}(\mu)$ est le stabilisateur de μ dans $GL(V)$. Les automorphismes infinitésimaux (dérivations de μ) sont exactement les éléments de $Z^1(\mu, \mu)$ et par conséquent la dimension du plan tangent en $\mu = \dim GL(V) - \dim Z^1(\mu, \mu) = n^2 - \dim Z^1(\mu, \mu) = \dim B^2(\mu, \mu)$.

On peut exprimer cette dimension à l'aide de groupes de cohomologie H^0 et H^1 ; pour une algèbre de Lie μ de dimension n , on a :

$$\dim B^2(\mu, \mu) = n^2 - n + \dim H^0(\mu, \mu) - \dim H^1(\mu, \mu) \quad (\text{II.7})$$

$(H^0(\mu, \mu))$ est le centre de l'algèbre μ .

En particulier, dans le cas d'une algèbre semi-simple :

$$\dim B^2(\mu, \mu) = \dim Z^2(\mu, \mu) = n^2 - n$$

5. Déformations analytiques : les conditions d'intégrabilité

Par hypothèse, pour des déformations analytiques, il existe un certain rayon de convergence t_0 non nul, tel que pour $t \geq t_0$, la série suivante soit convergente :

$$\mu_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mu_n(x, y) \quad (\text{II.8})$$

On utilisera toujours la notation : $\mu_0(x, y) = [x, y]$.

Les coefficients μ_n sont des applications bilinéaires de $V \times V$ dans V . Ils sont antisymétriques :

$$\mu_n \in L(V \wedge V, V)$$

mais, sauf pour $n = 0$, ils n'ont aucune raison de définir une loi d'algèbre de Lie. Cependant, ils doivent vérifier un certain nombre de relations destinées à assurer que μ_t est une loi d'algèbre de Lie : ce sont les conditions d'intégrabilité, que l'on obtient en écrivant l'identité de Jacobi, pour $t \leq t_0$, $t_0 > 0$:

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q=0,1,\dots,n \\ \wp(x,y,z)}} \mu_p(\mu_q(x,y),z) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Ces relations s'écrivent encore :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \neq 0 \\ \wp(x,y,z)}} \mu_p(\mu_q(x,y),z) &= - \left[\sum_{\wp(x,y,z)} [\mu_n(x,y),z] + \sum_{\wp(x,y,z)} \mu_n([x,y],z) \right] \\ &= \delta \mu_n(x,y,z) \text{ d'après (A7)} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

En particulier, à l'ordre 1, on retrouve que $\delta \mu_1 = 0$, c'est-à-dire que le vecteur tangent μ est un cocycle. Les conditions d'intégrabilité sous la forme (II.10) expriment que le premier membre doit être un 3-cobord. Gerstenhaber a démontré le résultat suivant :^[G1]

Proposition 1

Supposons les conditions vérifiées pour $n = 1, 2, \dots, m-1$ et définissons $G_m(x,y,z) = \sum_{\substack{p+q=m \\ p,q \neq 0 \\ \wp(x,y,z)}} \mu_p(\mu_q(x,y),z)$

Alors G_m est un 3-cocycle : $G_m \in Z^3(\mu, \mu)$

Il n'est possible de construire une déformation à l'ordre m que si ce cocycle est également un cobord. Ce cocycle "mesure" donc d'une certaine façon la possibilité de déformation à l'ordre m : on

l'appelle l'obstruction d'ordre m à la déformation (si l'on fait abstraction ici du problème de la convergence).

On peut maintenant préciser la structure du cône des tangentes à la variété L_n .

Définition d'un cocycle intégrable

Soit $\mu_1 \in Z^2(\mu, \mu)$ un 2-cocycle. Nous dirons que μ_1 est "intégrable" au sens géométrique, s'il existe une suite d'éléments $\mu_i \in L(V \wedge V, V)$ vérifiant les conditions (II.10) et tels que $\mu_t = \sum_n t^n \mu_n$ soit une série convergente dans un domaine $t < t_0$.

En d'autres termes, il est possible de trouver un chemin μ_t sur la variété, dont μ_1 soit le vecteur tangent. Un cocycle intégrable correspond donc exactement à un vecteur tangent à la variété ; l'ensemble des cocycles intégrables que l'on peut appeler $Z^{2 \text{ int.c}}(\mu, \mu)$ [contenu dans $Z^2(\mu, \mu)$] forme le cône des tangentes à la variété.

Le cas particulier $H^3(\mu, \mu) = 0$

Il est toujours possible de trouver une suite μ_i vérifiant les conditions (II,10) mais rien n'assure que l'on puisse trouver une suite convergente. (En fait, ceci est possible, cf. plus loin V.

On peut cependant montrer directement par des arguments de géométrie algébrique que dans le cas $H^3(\mu, \mu) = 0$:

- tout cocycle est intégrable géométriquement, c'est-à-dire $Z^{2 \text{ int.c}}(\mu, \mu) = Z^2(\mu, \mu)$, le plan tangent géométrique en μ est effectivement $Z^2(\mu, \mu)$.

- le point μ est contenu dans une composante irréductible et une seule $\mathcal{C}$ de la variété L_n , et c'est un point simple de $\mathcal{C}$ [NR 1].

En particulier, c'est le cas d'une algèbre de Lie semi-simple. De même, toute algèbre dont le radical est de dimension inférieure ou égale à 2 correspond à un point simple de la variété L_n . (Il suffit d'utiliser la décomposition de l'algèbre en produit semi-direct d'une algèbre semi-simple S par son radical R :

En effet, $H^3(g, g) = H^3(R, g)^S$ est nul si $\dim R < 2$).

III - THEOREME DE RIGIDITE GEOMETRIQUE

Comme dans le chapitre précédent, les notions topologiques se référeront toujours, sauf mention explicite du contraire, à la topologie de L_n induite par la topologie naturelle de k^n ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Définition générale de la rigidité géométrique

Une algèbre de Lie sur k ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite rigide, s'il existe un voisinage U de μ dans la variété L_n des algèbres de Lie, $U \subset L_n$, tel que :

$$\forall m \in U, \exists g \in GL(V) \text{ tel que } g.m = \mu.$$

En introduisant l'application $0_\mu : g \in GL(V) \rightarrow g.\mu \in L_n$, on voit que cette définition est équivalente à la suivante : μ est rigide, si l'image de 0_μ contient un voisinage ouvert de μ , ce qui signifie encore que l'orbite de μ est ouverte dans L_n .

Proposition 1. Une algèbre rigide est un point régulier de L_n (au sens différentiable).

En effet, dire que μ est un point singulier signifie que le rang de l'application $\frac{\delta p^1}{\delta x^i}$ (notations du Ch. I, C) n'est pas maximum. Ce rang est encore lié à la dimension de $Z^2(\mu, \mu)$, qui reste stable par le groupe $GL(V)$ (un isomorphisme entre algèbres de Lie induit un isomorphisme sur les espaces de cocycles). Par conséquent, si un point est singulier, tous les points appartenant à la même orbite le sont aussi. Mais il est impossible qu'un ouvert ne contienne que des points singuliers.

Au niveau des déformations, la définition précédente de la

rigidité se traduit par :

Soit μ_t une déformation de μ . Si μ est rigide, il existe $t_0 > 0$, tel que pour toutes valeurs de $t \leq t_0$, μ_t soit isomorphe à μ .

Autrement dit, toute déformation de μ est (localement) triviale.

D'après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, il en résulte que tout vecteur tangent à la variété en μ est aussi un vecteur tangent à l'orbite. Il est clair que cette situation sera réalisée quand $H^2(\mu, \mu) = 0$.

Dans ce cas en effet, les plans tangents à l'orbite $B^2(\mu, \mu)$ et à la variété ($Z^{2\text{int}}(\mu, \mu) \subset Z^2(\mu, \mu)$) coïncident. On peut donc s'attendre à ce qu'une condition suffisante de rigidité soit : $H^2(\mu, \mu) = 0$. Pour des algèbres de Lie sur un corps algébriquement clos, cette situation géométrique intuitive est susceptible d'un traitement rigoureux. On a en effet le théorème suivant, dont la démonstration est due à A. Nijenhuis et A.W. Richardson [N.R.1] :

Théorème 1. Soit $\mu \in L_n$, une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, telle que $H^2(\mu, \mu) = 0$ *. Alors l'orbite $O(\mu)$ est un sous-ensemble ouvert pour la topologie de Zariski de L_n .

Démonstration. Le groupe $GL(V)$ est irréductible, et chaque composante irréductible de la variété L_n est stable sous l'action de $GL(V)$. (cf. Ch. 0). Soit L_1 la composante irréductible de L_n contenant μ . Il suffit de montrer que $O(\mu)$ est un sous-ensemble ouvert de L_1 pour la topologie de Zariski. D'après les résultats sur les espaces tangents (Ch. I), on a :

* le théorème est vrai pour tout corps algébriquement clos.

$$B^2(\mu, \mu) = T(0(\mu), \mu) \subset T(L_1, \mu) \subset Z^2(\mu, \mu)$$

D'après l'hypothèse, $B^2(\mu, \mu) = Z^2(\mu, \mu)$, les espaces tangents à $0(\mu)$ et à L_1 sont identiques. On en déduit :

$$\dim T(0(\mu), \mu) = \dim 0(\mu) \leq \dim L_1 \leq \dim T(L_1, \mu)$$

(car tout point est simple dans son orbite), et donc : $\dim L_1 = \dim 0(\mu)$.

D'après un résultat de C. Chevalley [C] $0(\mu)$ contient un sous-ensemble ouvert de L_1 , qui est sa fermeture, et donc que $0(\mu)$ est un sous-ensemble ouvert de L_1 .

Corollaire [N.R.1]. Soit $U_1 = \{\mu \in L_n, H^2(\mu, \mu) = 0\}$. Alors U_1 est un sous-ensemble ouvert de Zariski de L_n (pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). De plus, quand $k = \mathbb{C}$, le groupe $GL(V)$ n'a qu'un nombre fini d'orbites sur U_1 .

Soient A_k le sous-ensemble formé par des $m \in L_n$ tels que $\dim Z^2(m, m) \leq k$. A_k est un sous-ensemble ouvert de Zariski de L_n . Soit $B_k = \{m \in L_n, \dim B^2(m, m) \geq k\}$ c'est aussi un ouvert de Zariski.

L'ensemble U_1 est l'union des familles $\{A_k \cap B_k\}$ $k \in \mathbb{Z}$ ce qui montre que c'est un sous-ensemble ouvert dans L_n pour la topologie de Zariski. Il résulte alors du théorème 1 que l'intersection de U_1 avec chaque composante irréductible de L_n contient au plus une orbite de G donc qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de G sur U_1 .

Le théorème précédent relevait directement de la situation géométrique, et c'est pourquoi nous l'avons exposé en premier lieu. Toutefois l'article de Nijenhuis et Richardson "cohomology and deformations in graded Lie algebras" contient des résultats plus riches, en particulier (th.16.2) :

Théorème 2 : Si $\mu \in L_n$ est une algèbre de Lie telle que $H^2(\mu, \mu) = 0$ sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, μ est une algèbre de Lie rigide.

$\mathcal{O}(\mu)$ est donc un ouvert de L_n . On montre [prop. 17.1] que pour $k = \mathbb{C}$; $\mathcal{O}(\mu)$ est aussi un ouvert de Zariski, et pour $k = \mathbb{R}$, c'est une

composante d'un sous-ensemble ouvert de Zariski dans L_n (plus précisément dans la composante irréductible de L_n contenant μ). La différence entre les 2 cas vient de ce que tout ouvert de Zariski est connexe sur C , mais non en général sur R .

2. Remarques sur une condition nécessaire de rigidité.

Le théorème 2 donne donc une condition suffisante de rigidité. Un récent contre-exemple de R.W.Richardson que nous détaillons plus loin montre que cette condition n'est pas nécessaire; actuellement on ne connaît pas de condition générale nécessaire et suffisante de rigidité en termes algébriques simples. Remarquons cependant que cette difficulté n'existe que pour les points de la variété où $Z^2(\mu, \mu)$ ne représente pas le plan tangent géométrique en μ . Dans la suite, nous dirons qu'un point μ est un "point simple de L_n attaché aux équations de Jacobi", si μ appartient à une et une seule composante irréductible L_1 de L_n et si :

$$\dim L_1 = \dim T_{\mathcal{P}}(\mu, L_n)$$

où $T_{\mathcal{P}}(\mu, L_n)$ est la variété linéaire tangente calculée à partir des équations de Jacobi, donc

$$\dim T_{\mathcal{P}}(\mu, L_n) = \dim Z^2(\mu, \mu).$$

[Un point simple de L_n est donc (ch. II, def.3) un point simple attaché à l'idéal $J(L_n)$ associé à la variété de L_n]. Un point simple attaché aux équations de Jacobi est évidemment a fortiori un point simple de L_n , mais la réciproque n'est pas vraie.

En répétant la démonstration du théorème 1, il est clair que pour un tel point μ , dire que l'orbite $O(\mu)$ est ouverte dans L_1 est équivalent à la condition

$$B^2(\mu, \mu) = Z^2(\mu, \mu).$$

Par conséquent, en un point simple μ de la variété L_n attaché aux équations de Jacobi, une condition nécessaire et suffisante de rigidité est que :

$$H^2(\mu, \mu) = 0$$

Géométriquement, il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante de rigidité pour l'algèbre μ est :

$$Z^{2\text{int.C}}(\mu, \mu) = B^2(\mu, \mu) \quad (\text{III.1})$$

ce qui peut-être évidemment plus faible que la condition suffisante $H^2(\mu, \mu) = 0$. Cette condition signifie que le cône des tangentes en μ est un espace vectoriel, donc que le point μ admet un espace vectoriel tangent. Elle exclut tous les points singuliers, mais pas nécessairement tous les points situés à l'intersection de plusieurs composantes. Le seul cas restant est celui des points non singuliers et multiples. Ces points peuvent fort bien remplir la condition (1) sans que pour autant on ait $H^2(\mu, \mu) = 0$, nous en donnerons un exemple dans le paragraphe suivant.

Une condition suffisante pour l'existence de tels points multiples serait que l'idéal formé par les polynômes de Jacobi ne soit pas égal à son radical (cf.Ch.0, def.2). Mais, bien que l'on connaisse des exemples d'idéaux analogues qui sont effectivement réduits (idéal formé par les matrices idempotentes^[Ray], on ne sait rien dire en ce qui concerne l'idéal de Jacobi.

3. Une algèbre de Lie rigide avec $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \neq 0$.

Le seul exemple connu jusqu'à présent, et qui a en plus le mérite d'être très simple, a été trouvé récemment par R.W. Richardson, au cours d'une investigation des propriétés de stabilité des produits semi-directs [Ri.1]. Nous allons montrer qu'il correspond bien à notre critère géométrique (III.1).

Soit S l'algèbre de Lie et semi-simple de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, les représentations irréductibles ρ_k de S sont de dimension $(2k+1)$ et notées D_k . On considère l'algèbre $\mathfrak{g}_k$ produit semi-direct de S et du S -module $\mathbb{C}^{2k+1}$: $\mathfrak{g}_k = S + D_k$.

Indiquons d'abord brièvement la démonstration générale de rigidité de L_k donnée par Richardson.

Si $\mathfrak{h}$ est contenue dans une sous-algèbre d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ de rang r , un résultat de Kostant [K] montre que la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ agissant sur $\mathfrak{g}$ se décompose en au plus r composantes irréductibles. De plus il existe une sous-algèbre simple de dimension 3 de $\mathfrak{g}$ telle que l'on ait l'égalité. Richardson [Ri. 1] montre que les seuls cas possibles de non rigidité pour $\mathfrak{g}_k$ sont obtenus quand $\mathfrak{g}$ est de rang 2 et de dimension $2k + 4$. Il résulte de la classification des algèbres de Lie semi-simples que $\mathfrak{g}_k$ est rigide, sauf pour $k = 1, 2, 3$ ou 5 .

Il est ensuite facile de montrer que pour k entier impair > 5 , les algèbres $\mathfrak{g}_k$ sont telles que $H^2(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k) \neq 0$ (par application du théorème de Serre et Hochschild).

Examinons le cas particulier le plus simple : il est obtenu pour $k = 7$.

Calculons $H^2(\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_7)$ [Cf. appendice A pour les notations] On sait d'abord qu'il y a une injection de $H^2(D_7, D_7)^S$ dans $H^2(\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_7)$. (Cela résulte de la suite exacte :

$$\rightarrow H^1(D_7, \mathfrak{g}_7 / D_7) \rightarrow H^2(D_7, D_7) \rightarrow H^2(D_7, \mathfrak{g}_7) \rightarrow \dots$$

qui à cause de la semi-simplicité de S se transforme en la même suite exacte pour les invariants :

$$\dots \rightarrow H^1(D_7, \mathfrak{g}_7/D_7)^S \rightarrow H^2(D_7, D_7)^S \rightarrow H^2(D_7, \mathfrak{g}_7)^S \rightarrow \dots)$$

et du fait que $H^1(D_7, \quad 7/D_7)^S = 0$

On a

$$H^2(D_7, D_7) = C^2(D_7, D_7)^S \quad (\text{car } D_7 \text{ est abélien})$$

car D_7 est abélien $= L(D_7 \wedge D_7, D_7)$ ce qui est un espace de dimension 1 car D_7 est contenu une seule fois dans $D_7 \wedge D_7$. Un élément est facilement obtenu si on note Y_M les vecteurs de D_7 , $M = -7 \dots +7$, par

$$\varphi(Y_M, Y_{M'}) = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ M & M' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} M+M' \\ 7 \end{vmatrix} Y_{M+M'} \quad (\text{III.2})$$

où $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ M & M' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} M+M' \\ 7 \end{vmatrix}$ est le coefficient de Clebsch-Gordan couplant $D^7 \wedge D^7$ sur D^7 .

La dimension de $H^2(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7)$ est au plus 2, car d'après le théorème de Serre-Hochschild

$$H^2(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7)^S = H^2(D_7, \mathcal{G}_7)^S.$$

et ce dernier espace est contenu dans $L(D_7 \wedge D_7, S + D_7)$ qui est de dimension 2. Enfin l'autre élément éventuel : $D_7 \wedge D_7 \rightarrow S$ conduirait à une déformation, et ne peut donc pas être un cocycle. Autrement dit, la dimension de $H^2(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7)$ est 1.

Examinons maintenant la variété $Z^{2\text{int}}(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7)$: On sait que $Z^{2\text{int}}(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7) \supset B^2(\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_7)$. Il reste à examiner le cocycle fourni par (III.2).

L'obstruction au deuxième ordre est donnée d'après (II.10) par :

$$\begin{aligned}
 G(Y_M, Y_{M'}, Y_{M''}) &= \sum_{P(M, M', M'')} \varphi \left(\varphi(Y_M, Y_{M'}), Y_{M''} \right) \\
 &= \sum_{P(M, M', M'')} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ M & M' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} M+M' \\ 7 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ M+M' & M'' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} M+M'+M'' \\ 7 \end{vmatrix} Y_{M+M'+M''}
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

Cette obstruction est-elle un cobord?

Un 3-cobord est déterminé par une fonction $\Psi \in L(D_7 \wedge D_7, S)$ et nous noterons ces composantes par :

$$\Psi(Y_M, Y_{M'}) = \alpha_{M M'}^{M''} X_{M''} \quad \text{où} \quad X_{M''} \in S$$

(Ici $S \approx D^1$) avec $\Psi(Y, X) = \Psi(X, X) = 0$.

Alors :

$$\delta \Psi(Y_M, Y_{M'}, Y_{M''}) = \sum_{P(M, M', M'')} [\Psi(Y_M, Y_{M'}), Y_{M''}] = \sum_{P(M, M', M'')} \alpha_{MM'}^{\tilde{M}} [X_{\tilde{M}}, Y_{M''}]$$

et en utilisant les relations de commutation (qui fait également intervenir des coefficients de Clebsh-Gordan :

$$\delta \Psi(Y_M, Y_{M'}, Y_{M''}) = \sum_{P(M, M', M''), \tilde{M}} \alpha_{MM'}^{\tilde{M}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ \tilde{M} & M'' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{M}+M'' \\ 7 \end{vmatrix} Y_{\tilde{M}+M''} \tag{III.4}$$

Il suffit de considérer les fonctions Ψ telles que $\tilde{M} = M+M'$.

Montrons alors que pour certaines valeurs de M, M', M'' on a $\delta \Psi = 0$ et $G \neq 0$.

Il suffit de prendre un système de valeurs telles que les sommes 2 à 2 soient supérieures à 1. On aura donc $\delta \Psi = 0$ à cause du coefficient de Clebsh-Gordan qui y est contenu. On peut ensuite calculer (III.3), et par exemple dans le cas $M = 0, M' = 3, M'' = 7$, on le trouve différent de 0.

Le cocycle n'est donc pas intégrable, et par conséquent

$$z^{2\text{int}}(g_7, g_7) = B^2(g_7, g_7)$$

ce qui correspond bien au critère géométrique de rigidité.

IV - DEFORMATIONS FORMELLES.

Ce chapitre comprend les parties suivantes :

1. Définitions des déformations formelles, de l'équivalence formelle. Théorème de rigidité.
2. Classification infinitésimale des déformations : notion de déformations équivalentes d'ordre n .
3. Remarques sur la stabilité des sous-algèbres : un théorème de Richardson pour les déformations convergentes.
4. Déformations formelles "dépendant de plusieurs paramètres".

2, 3 et 4 sont indépendantes entre elles, et ne dépendent que de la première partie.

1. Déformations formelles.

Il s'agit de l'étude des déformations initiée par Gerstenhaber [G 1] ^(*) (μ, V_K) étant une algèbre de Lie d'espace vectoriel sous-jacent V_K (sur le corps k , qui est toujours ici soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$), on s'intéresse aux "prolongements" de μ sur le corps $K = k((t))$, corps des fractions de l'anneau des séries formelles $k[[t]]$.

L'espace vectoriel obtenu en étendant le corps k au corps $K = k((t))$ est : $V_K = V \otimes k((t))$.

Définition 1 : Une "déformation formelle" de l'algèbre de Lie μ est une algèbre de Lie μ_t définie sur l'espace vectoriel V_K . C'est une application de $V_K \wedge V_K \rightarrow V_K$, qu'il suffit de définir par l'expres-

(*) On trouvera des développements ultérieurs dans [G2] et [G3].

sion suivante sur $V_k \wedge V_k$:

$$\mu_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mu_n(x, y) \quad \text{et} \quad (IV.1)$$

$$\mu_0 = \mu \quad (x, y \in V_k).$$

Les coefficients de cette série formelle sont des éléments : $\mu_n \in L(V_k \wedge V_k, V_k)$. On ne fait aucune hypothèse de convergence.

Les équations de Jacobi :

$$\mathcal{P}(\sum_{x,y,z}) \mu_t(\mu_t(x, y), z) = 0 \quad (IV.2)$$

imposent un nombre a priori infini de relations entre les coefficients μ_n . De la même façon qu'au chapitre II, ces équations au premier ordre (t) imposent que l'élément μ soit un cocycle pour l'algèbre initiale (μ_1 est défini sur le corps k). $\mu_1 \in Z^2(\mu, \mu)$.

On appellera "intégrable formellement" un cocycle μ_1 , tel qu'il existe une série formelle $\mu_t = \mu + t \mu_1 + t^2 \mu_2 + \dots$ vérifiant (IV.2). Les conditions (IV.2) s'appelleront encore "conditions d'intégrabilité".

Appelons $Z^{2int}(\mu, \mu)$ l'espace des cocycles qui sont formellement intégrables. Un cocycle intégrable (au sens convergent cf. II.5) l'est évidemment au sens formel, puisqu'on peut en donner un développement par rapport à t dans (IV.1). On a donc

$$Z^{2int}(\mu, \mu) \subset Z^{2int}(\mu, \mu) \subset Z^2(\mu, \mu)$$

Définition 2 : Deux déformations formelles g_t, f_t de l'algèbre μ sont dites formellement équivalentes s'il existe un élément du groupe $GL(V_k) \otimes k((t)), \Phi_t$, tel que :

$$g_t(x, y) = \Phi_t f_t(\Phi_t^{-1} x, \Phi_t^{-1} y) = (\Phi_t.f_t)(x, y) \quad (IV.3)$$

Φ_t est une série formelle en t qu'il suffit de définir sur V_k :

$$\Phi_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Phi_n(x) \quad \text{avec} \quad \Phi_n \in GL(V_k)$$

Gerstenhaber suppose en plus que $\Phi_0 = 1$ identité de $GL(V)$. En général Φ_0 est un élément du stabilisateur de l'algèbre initiale $\mu : \Gamma(\mu) \subset GL(V_k)$.

Au premier ordre en t , la relation (IV.3) donne, en notant la loi de l'algèbre μ par le crochet :

$$\mu[x, y] = [x, y]$$

$$\Phi_0.g_1(x, y) - f_1(\Phi_0 x, \Phi_0 y) = -[\Phi_0 x, \Phi_1 y] - [\Phi_1 x, \Phi_0 y] + \Phi_1[x, y] \quad (IV.4)$$

Notons $\Phi_0\mu$, le μ module donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in V_k \\ y \in V_k \end{array} \right. \rightsquigarrow x.y = [\Phi_0 x, y]$$

Ceci est une structure de μ -module car $\bar{\phi}_0$ appartient au stabilisateur $\Gamma(\mu)$ de μ .

La relation (4) s'écrit alors :

$$\bar{\phi}_0 \cdot g_1 - f_1 \circ \bar{\phi}_0 = - \delta^{\bar{\phi}_0} \bar{\phi}_1 (x, y)$$

$$\text{où } \delta^{\bar{\phi}_0} \bar{\phi}_1 \in B^2(\mu, \bar{\phi}_0 \mu)$$

Ainsi, pour $\bar{\phi}_0 = 1$, g_1 et f_1 diffèrent seulement par un cobord de $B^2(\mu, \mu)$.

Réciproquement on a [G.1] :

Proposition 1 : Si une déformation g_t de l'algèbre de μ commence par un cobord, il est toujours possible de "chasser" celui-ci, c'est-à-dire de rendre cette déformation formellement équivalente à une déformation de la forme suivante :

$$h_t(x, y) = [x, y] + t^n h_1(x, y) + \dots$$

où h_1 est un cocycle qui n'est pas un cobord.

Démonstration : Supposons que g_1 soit un cobord : $g_1 = \delta \bar{\phi}_1$ alors en considérant l'élément $e^{t\bar{\phi}_1} \in GL(V_k) \otimes k[[t]]$. On peut construire une déformation équivalente à g_t , et commençant à l'ordre t^2 , soit :

$$g'_t = (e^{+t\bar{\phi}_1} \cdot g_t)$$

$$\text{où } g'_t(x, y) = e^{t\bar{\phi}_1} \cdot g_t(e^{-t\bar{\phi}_1} x, e^{-t\bar{\phi}_1} y)$$

$$\text{alors } g'_1(x, y) = g_1(x, y) - \delta \bar{\phi}_1(x, y) = 0$$

Si le terme g'_2 est un cobord : $g'_2 = \delta \Psi$, on recommence en définissant $g''_t = e^{t\Psi} \cdot g'_t$, ce qui fournit une déformation commençant au troisième ordre, etc ...

Définition 3 : Une déformation formelle de l'algèbre g est dite "triviale" si elle est formellement équivalente à l'algèbre μ elle-même, (c'est-à-dire à la déformation identique de μ au sens de la définition 2.)

Définition 4 : Une algèbre de Lie μ est dite rigide (ou stable) formellement, si toutes ses déformations formelles sont triviales.

Autrement dit, toute déformation μ_t de μ formellement rigide est de la forme :

$$\mu_t(x, y) = \Phi_t^{-1} [\Phi_t x, \Phi_t y]$$

où Φ_t est une série formelle en t .

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate de la proposition (1) (Gerstenhaber 1) :

Théorème de rigidité 1 :

| Une condition suffisante de rigidité formelle pour l'algèbre μ est que $H^2(\mu, \mu) = 0$.

Remarque : Bien que ce critère soit le même que celui obtenu dans le cas de déformations convergentes, il n'y a pas de relation d'implication évidente entre les deux points de vue.

En effet on obtient alors une équivalence formelle entre une déformation μ_t et l'algèbre initiale μ . On a :

$$\mu_t = \Phi_t * \mu$$

où Φ_t qui est un produit infini d'exponentielles $e^{t\psi}$, n'a pas de raison d'être une série convergente.

Ainsi même si μ_t est une série convergente, cette équivalence est a priori différente de l'équivalence géométrique qui exige que Φ_t converge. On verra cependant plus loin que grâce au théorème d'Artin, cette rigidité implique la rigidité géométrique (convergente) [V].

2. Classification infinitésimale des déformations.

Sous la forme la plus générale, le problème de la classification des chemins de source donnée sur une variété n'est pas résolu. Les résultats précédents permettent cependant une classification "infinitésimale" des déformations.

Appelons $H^{2int}(\mu, \mu)$ l'ensemble obtenu en projetant $Z^{2int}(\mu, \mu)$ modulo l'espace vectoriel des cobords : on peut ensuite déterminer dans $H^{2int}(\mu, \mu)$ les classes d'équivalence dues à l'action du stabilisateur de μ : $\Gamma(\mu)$. (C'est-à-dire les orbites de $\Gamma(\mu)$ dans $H^{2int}(\mu, \mu)$ au sens défini en I). Ainsi, $\Gamma(\mu)$ opère sur $H^{2int}(\mu, \mu)$.

Définition 5 : Deux déformations f_t et g_t d'une même algèbre μ sont "équivalentes au premier ordre" si leurs vecteurs "tangents" f_1 et g_1 vérifient la relation (IV.4).

On voit alors facilement que deux déformations équivalents au premier ordre appartiennent à la même orbite de $\Gamma(\mu)$ dans $H^{2int}(\mu, \mu)$.

On verra sur des exemples que cette notion d'équivalence au premier ordre est très faible : en effet deux déformations non équivalentes peuvent cependant correspondre à un même vecteur tangent.

On peut encore formuler l'équivalence au premier ordre de la façon suivante :

deux déformations g_t et f_t de la même algèbre μ sont équivalentes au premier ordre si l'on peut trouver un élément $\Phi_t \in GL(V_k) \otimes k[[t]]$ tel que :

$$g_t - \Phi_t \cdot f_t \text{ congrue à une déformation en } t^2 \text{ de } \mu.$$

En effet si cette relation est vraie, g_1 et f_1 vérifient la relation (3); et réciproquement, si on peut trouver Φ_0 et Φ_1 tels que la relation (3) soit vérifiée, alors il suffit de choisir

$$\Phi_t = \Phi_0^{-1} e^{+t(\Phi_1 \Phi_0)} \text{ et on a :}$$

$$g_t - \Phi_t \circ f_t = h_t \quad \text{où} \quad h_t \equiv 0 \pmod{t^2}$$

$$(h_t = t^2 h_2 + \dots)$$

On peut ainsi donner d'autres relations d'équivalence partielles, en général :

Définition 6 : Deux déformations f_t et g_t d'une même algèbre g sont "équivalentes d'ordre n " si l'on peut trouver un élément $\Phi_t \in GL(V_k) \otimes k[[t]]$ tel que :

$$g_t - \Phi_t \cdot f_t \equiv 0 \pmod{t^n}$$

Ces définitions s'adaptent au cas de déformations convergentes en imposant en plus la convergence de Φ_t . Dans le cas de déformation analytique, il est possible qu'un nombre fini d'équivalence a des ordres 1, 2, 3... soit suffisant pour assurer l'équivalence globale (def. 2) (Le sens géométrique de cette propriété serait : si les deux chemins issus d'un point μ ont "suffisamment de contact" en μ , alors ils coïncideront dans un voisinage de μ les contenant tous les deux).

3. Remarques sur la stabilité des sous-algèbres.

On utilise la notation $L = (\mu, V)$ pour une algèbre de Lie de loi μ et d'espace vectoriel sous-jacent V .

Définition d'une sous-algèbre stable (Page, Richardson [Ri 2]) :
 S est une sous-algèbre stable de l'algèbre $L = (\mu, V)$, si pour tout voisinage U de e dans $G = GL(V)$, il existe un voisinage U' de μ dans L_n , tel que pour tout $\mu' \in U'$, la restriction de g à S est un isomorphisme de S sur une sous-algèbre S' de $L' = (V, \mu')$.

Soit $N = \{(g, m) \in G \times L_n \mid \rho(g.m) = \rho(\mu)\}$ où ρ est l'opération restriction de $A^2(L, V) \rightarrow A^2(S, V)$ (espace des applications antisymétriques $L \wedge V \rightarrow V$, resp $S \wedge S \rightarrow V$), et soit π la projection de $N \rightarrow L_n$.

La condition suivante (a) implique que S est stable :

(a) : π applique chaque voisinage de (e, μ) dans N sur un voisinage de μ dans L_n .

Théorème 3 : [Ri 2] Soit $L = (V, \mu)$ une algèbre de Lie réelle de dim. finie et soit S une sous-algèbre de L telle que $H^2(S, V) = 0$. Alors S satisfait la condition (a).

(Le théorème démontré par Page et Richardson est même un peu plus fin : S est telle qu'il existe une application réelle analytique $\sigma : U' \rightarrow G$, U' voisinage de μ dans L_n , avec $\sigma(\mu) = e$ et tel que $(\sigma(m), m) \in N \quad \forall m \in U$).

La démonstration de ce résultat est loin d'être simple (elle utilise plusieurs fois le théorème des fonctions implicites, ainsi que des concepts de géométrie algébrique : essentiellement les difficultés viennent de ce qu'il faut plonger la variété L_n des algèbres de Lie dans un ensemble algébrique réel plus grand L_1 tel que l'algèbre

considérée μ soit un point simple dans L_1).

Par ailleurs, on pouvait s'attendre à un résultat analogue, car dans la théorie des déformations formelles, on obtient facilement le résultat suivant :

| Si $H^2(S, V) = 0$, S est formellement rigide. (C'est-à-dire toute déformation formelle de L , restreinte à S , est triviale).

Soit en effet $L = (\mu, V)$ l'algèbre de départ, $S = (\rho(\mu), \rho(V))$ la restriction à une sous-algèbre. Notons μ_t une déformation de μ . La restriction correspondante $\rho(\mu_t)$ n'est pas forcément une sous-algèbre de μ_t , mais son "vecteur tangent" $\rho(\mu_1) \in Z^2(S, V)$. Si $H^2(S, V) = 0$ $\rho(\mu_1)$ est un cobord que l'on peut chasser de la même façon que pour l'algèbre globale, par une transformation de $GL(V) \otimes k[[t]]$.

4. Déformation dépendant de plusieurs paramètres : composition de déformation.

Dans la recherche pratique des déformations d'une algèbre donnée par μ , il est possible d'obtenir de façon systématique toutes les déformations linéaires en t , c'est-à-dire toutes les déformations de la forme $\mu_t(x, y) = \mu(x, y) + t \mu_1(x, y)$. On peut ensuite recommencer le processus sur les algèbres obtenues et cela conduit à des déformations du deuxième ordre en μ (cf. exemple de Galilée). Est-il possible d'obtenir toutes les déformations du deuxième ordre de cette manière? et plus généralement à quelles conditions une déformation à l'ordre n se "décompose-t-elle" en déformations successives d'ordre inférieur. On ne sait malheureusement pas répondre à cette question, malgré l'intérêt évident qu'elle présente pour la recherche des déformations d'une algèbre donnée.

Toutefois une façon simple d'essayer d'aborder ce problème est d'examiner un peu plus précisément le processus de "composition" que nous avons rencontré lors de l'étude explicite principalement des

déformations de Galilée. Cela nous conduit à la notion de déformation dépendant de deux paramètres.

Définition 8 : Une déformation de l'algèbre μ , dépendant de deux paramètres, est une application différentiable de $R \times R$ dans la variété des constantes de structure L_n soit $\mu_{t,t'}$ telle que $\mu_{0,0} = \mu$ (définie dans un voisinage $t \leq t_0, t' \leq t'_0$)

On peut considérer de la même façon des déformations analytiques admettant un développement dans les deux variables, ou des déformations formelles pour lesquelles on n'exige aucune condition de convergence, avec :

$$\mu_{t,t'}^{(x,y)} = \sum_{p,q=0}^{\infty} t^p t'^q \mu_{p,q}^{(x,y)} \quad \forall x, y \in V \quad (IV.5)$$

et

$$\mu_{0,0}^{(x,y)} = \mu^{(x,y)} \quad (\text{noté encore } [x,y])$$

Ordonnons ces déformations de la façon naturelle (en considérant l'ordre total des termes) :

$$\mu_{t,t'} = \sum \mu_{t,t'}^{(N)} \quad (IV.6)$$

avec

$$\mu_{t,t'}^{(N)} = \sum_{p+q=N} t^p t'^q \mu_{p,q} \quad (IV.7)$$

$\forall t, t'$ dans un voisinage de 0, les relations de Jacobi doivent être rectifiées. On obtient ainsi en utilisant l'indépendance des termes en $t^p t'^q$, une série de relations d'intégrabilité qui font intervenir les coefficients $\mu_{p,q}$.

Nous allons montrer le résultat suivant : un système équivalent de relations d'intégrabilité est obtenu en prenant les relations d'intégrabilité (II.10) correspondant au cas à 1 paramètre, mais en remplaçant les composantes μ_p par la composante d'ordre total p.

La signification de ce résultat est claire : à condition de considérer des termes d'ordre total déterminé, les déformations à 2 paramètres ont une structure identique à celle des déformations à 1 paramètre (on a les mêmes relations entre les différents ordres de grandeur).

Démonstration : Il est immédiat que $\mu_{t,t'}^{(2)} = t \mu_{1,0} + t' \mu_{0,1}$ est encore un cocycle de $Z^2(\mu, \mu)$, car $\mu_{1,0}$ et $\mu_{0,1}$ sont séparément des cocycles. Il suffit alors de procéder par récurrence sur N. Supposons le résultat vrai jusqu'à $N - 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum \mu_{t,t'}^{(P)} (\mu_{t,t'}^{(Q)} (x, y), z) &= 0 \text{ pour } r = 0, 1, \dots, N-1 \\ P+Q &= r \\ P, Q &= 0, 1, \dots, r \\ \mathcal{P}(x, y, z) \end{aligned}$$

On développe alors cette expression dans le cas $r = N$, et on trouve que le coefficient de t'^α et t^β dans ce développement est :

$$\begin{aligned} \delta \mu_{\alpha, \beta}^{(x, y, z)} + \sum_{\lambda; \mathcal{P}(x, y, z)} \mu_{\lambda, 0} (\mu_{\alpha, \beta-\lambda}^{(x, y), z}) + \mu_{\alpha, \beta-\lambda} (\mu_{\lambda, 0}^{(x, y), z}) \\ + \sum_{\substack{r+s = \beta \\ p'+q' = \alpha}} \mu_{p', r} (\mu_{q', s}^{(x, y), z}) \end{aligned}$$

cette expression correspond exactement aux conditions d'intégralité sur les $\mu_{p,q}$, elle est donc nulle.

Nous allons montrer maintenant que la déformation à deux paramètres peut s'interpréter comme une composition de deux déformations à 1 paramètre (et par conséquent elle ne fournit pas de renseignements plus fins sur la structure locale de la variété).

Le cas particulier obtenu en faisant $t' = 0$ est une déformation de μ dépendant d'un seul paramètre. (Les conditions d'intégrabilité sont a fortiori vérifiées).

Appelons $\mu_t^1 = \mu_{t,0}$ cette déformation. La déformation $\mu_{t,t'}$ s'écrit aussi :

$$\mu_{t,t'} = \mu_t^{(1)} + t' G_1(t) + t'^2 G_2(t) + \dots \quad (\text{IV.8})$$

avec

$$G_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \mu_{p,n}$$

Mais on peut voir que pour chaque valeur de t , les coefficients $G_i(t)$ vérifient les conditions d'intégrabilité (II.10) d'une déformation de l'algèbre initiale $\mu_t^{(1)}$.

$$\text{En particulier, } G_1(t) \in Z^2(\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(1)})$$

Réciproquement, si on part d'une déformation $\mu_t^{(1)}$ et que l'on déforme celle-ci, on obtient une expression de la forme (5) qui est une déformation à deux paramètres : toutes les conditions d'intégrabilité en $t^p t'^q$ sont vérifiées (même calcul que dans la démonstration précédente).

On pourrait considérer de la même façon une déformation dépendant d'un nombre quelconque de paramètres $t, t', t'' \dots$ en ordonnant par rapport à l'ordre total on obtient une déformation du type :

$$\mu_{t,t',t'',\dots} = \sum_{N=0}^{\infty} \mu_{t,t',t'',\dots}^{(N)}$$

où les termes $\mu^{(N)}$ vérifient les relations d'intégrabilité (II.10) correspondant au développement à 1 paramètre.

On obtient également une succession de n déformations s'il y a n paramètres.

Exemple de déformation dépendant de deux paramètres : Sur $\mathbb{C}$, considérons l'algèbre de dimension 4, somme directe de $\mathfrak{L}(E_2)$ algèbre de Lie groupe euclidien du plan, et d'une algèbre de dimension 1.

$$\mu = \mathfrak{L}(E_2) \oplus \varepsilon$$

Notons e_3, e_+, e_- une base de $\mathfrak{L}(E_2)$, et e de ε .

$$[e_+, e_-] = 0$$

$$[e_3, e_+] = e_+$$

$$[e_3, e_-] = -e_-$$

$$[e_+, e] = [e_-, e] = [e_3, e] = 0$$

On obtient facilement une déformation de μ dépendant de deux paramètres.

$$\mu_{t,t'} = \mu + t^2 \mu_{2,0} + t' \mu_{0,1}$$

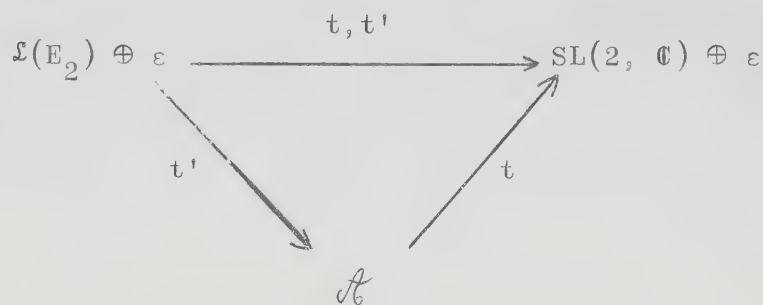
avec

$$[e_+, e_-]_{t,t'} = 2t^2 e_3 - t' e$$

Les autres crochets restant inchangés.

Pour $t \neq 0$, cette algèbre est l'algèbre $SL(2, \mathbb{C}) \oplus \varepsilon$ (pour toutes valeurs de t' : il suffit de poser $e'_3 = e_3 - \frac{t't-2}{2}e$). Pour $t = 0$, on obtient une déformation en t' de $\mathfrak{L}(E_2) \oplus \varepsilon$ dans une algèbre $\mathcal{A}$ extension centrale de $\mathfrak{L}(E_2) \oplus \varepsilon$. Cette algèbre se déforme elle-même en t dans $SL(2, \mathbb{C}) \oplus \varepsilon$.

En résumé, on a le tableau suivant:



V - COMPARAISON ENTRE LA RIGIDITE FORMELLE ET LA RIGIDITE GEOMETRIQUE : UN THEOREME D'ARTIN

Les deux approches, formelle et géométrique, conduisent à la condition suffisante de rigidité $H^2(\mu, \mu) = 0$. Ce sont pourtant a priori des approches complètement différentes. Prenons par exemple le cas de l'équivalence formelle : une déformation de μ , qui est une série formelle μ_t est équivalente à μ , s'il existe un élément de $GL(V_k((t)))$, c'est-à-dire une série formelle en t à coefficients dans $GL(V_k)$, Φ_t telle que

$$\mu_t = \Phi_t * \mu.$$

Même si l'on se restreint à une déformation μ_t analytique en t , une telle équivalence n'a aucune raison a priori d'entraîner l'existence d'un élément Ψ_t convergent en t , tel que

$$\mu_t = \Psi_t * \mu.$$

Autrement dit, une déformation triviale au sens de l'équivalence formelle n'est pas a priori triviale au sens de l'équivalence géométrique.

Un théorème d'Artin va nous permettre d'affirmer que les résultats formels entraînent les résultats géométriques ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit k un corps de caractéristique zéro, avec une valuation non triviale.

Considérons un système d'équations analytiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x, u) = 0 \end{array} \right. \quad (V.1)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, et où les $f(x, y)$ sont des séries analytiques convergentes (*) à coefficients dans k par rapport aux variables x et y . On a le théorème suivant (Artin [A]).

Théorème 1 : Supposons que :

$$\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_N(x)) , \bar{y}_N(x) \in k[[x]].$$

soient des séries formelles sans termes constants qui sont telles que

$$f_i(x, \bar{y}(x)) = 0$$

Soit C un entier donné à l'avance, alors il existe une solution par des séries convergentes $y(x) = (y_1(x), \dots, y_N(x))$ des équations (1) telles que : $y(x) \equiv \bar{y}(x) \text{ modulo } t^C$.

La condition de congruence signifie que les coefficients des polynômes de degré strictement inférieur à C , dans $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ coïncident.

Conséquences :

a) L'intégralité formelle entraîne l'intégralité convergente (analytique)

$$Z^{2int}(\mu, \mu) = Z^{2int C}(\mu, \mu).$$

En effet, soit μ_1 un cocycle appartenant à $Z^{2int}(\mu, \mu)$: il existe par hypothèse une série formelle $\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \dots$ vérifiant les équations de Jacobi.

(*) c'est-à-dire de rayon de convergence strictement positif.

Notons $\bar{\chi}(t) = \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3 + \dots$. On a :

$$\sum_{P(a,b,c)} (\mu_0 + \mu_1 t + \bar{\chi}(t)) ((\mu_0 + \mu_1 t + \bar{\chi}(t)) (a, b), c) = 0 \quad (V.2)$$

Posons $\bar{y}_\alpha(t) = \bar{\chi}_{ij}^k(t)$ $\alpha = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$ où $\bar{\chi}_{ij}^k(t)$ sont les constantes de structure de l'application $\bar{\chi}(t)$ (cf I). $\bar{y}_\alpha(t)$ est une série formelle sans terme constant.

En décomposant les équations (2) suivant la base choisie, on obtient un système de $\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$ équations F_i

$$F_i(t, \bar{y}(t)) = 0$$

Les fonctions dépendant des variables t et y associées sont manifestement des polynômes en t et y et vérifient donc les conditions du théorème. Celui-ci nous dit alors que pour tout entier C , il existe une série convergente $y_\alpha(t) = \chi_{ij}^k(t)$ $\alpha = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$ solution des équations (2), qui coïncide avec la série formelle $\chi_{ij}^k(t)$ jusqu'à l'ordre $c - 1$.

Le cocycle μ_1 est par conséquent intégrable au sens géométrique (il existe une série convergente qui le prolonge en une algèbre de Lie μ_t).

b) L'équivalence formelle entraîne l'équivalence géométrique (dans le cas de déformations analytiques).

Soient μ_t et μ'_t deux déformations de l'algèbre μ , que nous supposons analytiques en t . Supposons que μ_t et μ'_t soient équivalentes : il existe une série formelle $\Phi_t \in GL(V_k) \otimes k((t))$ telle que :

$$\mu'_t = \Phi_t * \mu_t \quad (V.3)$$

Posons :

$$\mu'_t = \mu + v'_t$$

$$\mu_t = \mu + v_t$$

$$\Phi_t = \Phi_0 + \Psi_t \quad \text{où} \quad \Phi_0 * \mu = \mu$$

les séries v'_t et v_t sont convergentes (et même analytiques en t), la série Ψ_t est une série formelle; toutes sont sans coefficients constants.

Posons :

$$\bar{y}_\alpha(t) = v_{ij}^{k'}(t) \quad \text{pour} \quad \alpha = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$$

$$\bar{y}_\alpha(t) = v_{ij}^k(t) \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{n^2(n-1)}{2} + 1, \dots, n^2(n-1)$$

$$\bar{y}_\alpha(t) = \bar{\psi}_i^j(t) \quad \text{pour}$$

$$\alpha = (n^2)(n-1), n^2(n-1) + 1, \dots, n^3$$

L'équation (3) se met ainsi sous la forme :

$$\bar{\phi}_k^1(t) \mu_{ij}^{k'}(t) = \bar{\phi}_i^m(t) \bar{\phi}_j^n(t) \mu_{mn}^1(t) \quad (\text{V.4})$$

c'est-à-dire :

$$F_i(\bar{y}_\alpha(t)) = 0 \quad i = 1, \dots, \frac{n^2(n-1)}{2}$$

Ici encore les fonctions F_i sont polynomiales par rapport aux variables y_α , et le théorème s'applique en particulier au cas où les fonctions F_i ne dépendent pas de t . Par conséquent, il existe une

solution $y_\alpha(t)$ convergente, qui coïncide avec la solution formelle modulo t^c , quel que soit l'entier c .

Mais ceci entraîne qu'il existe une solution convergente coïncidant avec les composantes analytiques de la solution formelle, autrement dit, qu'il existe une solution

$$y_\alpha(t) = (v_{ij}^{'k}(t), v_{ij}^k(t), \psi_i^j(t))$$

avec $\psi_i^j(t)$ convergent, ce qui prouve l'équivalence géométrique des algèbres μ'_t et μ_t .

c) La rigidité formelle entraîne la rigidité géométrique (dans le cas analytique). Supposons μ rigide formellement. Alors toute déformation formelle de μ est équivalente formellement à μ , mais ceci est en particulier vrai pour une déformation convergente et analytique de μ . D'après b), toute déformation analytique est donc géométriquement équivalente à μ , et μ est rigide géométriquement.

VI - CONTRACTION D'ALGÈBRES DE LIE

Le concept de contraction d'algèbres de Lie a été introduit par Segal [Se], et par Inonđ et Wigner en 1953 [I.W]. Utilisé fréquemment en physique, il est resté pratiquement ignoré des mathématiciens. En 1961, il a été repris par E. Saletan [Sa] qui, généralisant la forme initiale proposée par Inonđ et Wigner, a montré en particulier l'existence de suites d'algèbres contractées dont il a également donné une série de propriétés. Plus récemment, avec le développement pris par l'étude des algèbres de Lie en physique on assiste à un nouvel intérêt pour ce sujet. Soulignons ici en particulier les travaux de Berendt ainsi que de Doebner et Melsheimer dont nous examinerons brièvement plus loin les rapports avec notre approche.

Géométriquement, on voit clairement que la notion de contraction est liée à celle de déformation, et qu'elle en est pratiquement la réciproque. Alors que la déformation est un chemin dans un voisinage d'une algèbre donnée, la contraction d'une algèbre μ nous conduit dans l'adhérence de l'orbite de μ , et l'algèbres de départ est une algèbre déformée de l'algèbre contractée.

En examinant, dans le §1, comment s'effectue précisément ce rapport contraction-déformation, dans le cadre des définitions habituelles (celles d'Inonđ et Wigner, et de Saletan), nous serons conduit à une généralisation de ces définitions, et à considérer des algèbres contractées plus fines, dites "singulières". C'est ce que nous ferons dans le § 2 où nous indiquerons également quelques propriétés de ces algèbres contractées. au §3, nous indiquerons d'autres définitions des algèbres contractées (Berendt). Enfin, nous reviendrons au §4 sur le lien entre contraction et déformation, nous terminerons par quelques propriétés générales au §5.

1. Contraction particulière de Saletan et déformation

Rappelons d'abord la définition de la contraction d'après Saletan (nous en aurons besoin dans la suite).

1a) La contraction de Saletan

Soit μ une algèbre de Lie, d'espace vectoriel sous-jacent V avec la loi $a, b \rightsquigarrow [a, b] \quad a, b \in V$.

On considère une application $\Phi_t \in L(V)$ de la forme :

$$\Phi_t = u + t v \quad u, v \in L(V)$$

régulière pour $t \neq 0$; $\Phi_t, t \neq 0 \in GL(V)$ et singulière pour $t = 0$.

L'algèbre contractée μ_0 est définie par la limite :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b] = [a, b]_0 \quad (VI.1)$$

Saletan étudie cette limite en prenant $v = \mathbb{1} - u$, afin que $\Phi_1 = \mathbb{1}$. Dans la suite, nous prendrons $v = \mathbb{1}$ ce qui conduit au même résultat. ^(*)

[J] On peut exprimer la limite en introduisant la décomposition de Fitting de l'espace V (qui est de dimension fini) par rapport à l'application u . V est somme directe de deux sous-espaces disjoints V_R et V_N .

$$V_R = \bigcap_i u^i V \quad i = 1, 2 \dots$$

$$V_N = \bigcup_i \text{Ker } u^i = \bigcup_i V_i$$

(Nous noterons V_i le noyau de u^i). [J]

$$(*) \text{ car } u + t(1 - u) = (1 - t)(u + \frac{t}{1-t} \mathbb{1})$$

Il existe un entier q minimum tel que $V_R = u^q V$ et $u^q V_N = 0$.

On trouve alors que la limite (V.1), quand elle existe, est donnée par $[Sa]$:

$$[a, b]_0 = u^{-1}[ua, ub]_R + [ua, b]_N + [a, ub]_N - u[a, b]_N \quad (VI.1)$$

Les indices N et R indiquent les composantes dans les espaces V_N et V_R respectivement.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de la limite est d'après Saletan : $u([ua, b]_N + [a, ub]_N - u[a, b]_N) = [ua, ub]_N$, ce qui s'écrit encore :

$$u[a, b]_0 = [ua, ub]$$

(où $[a, b]_0$ est donné par l'expression (2)).

Remarquons que (VI.3) signifie que u est un homomorphisme de μ_0 dans μ .

Remarque : Au lieu de prendre une application $\Phi_t = u + t1$ on aurait pu prendre une application $\Phi_t = u + tv$, également régulière pour $t \neq 0$. Si v est une application régulière, il est facile de voir qu'un tel développement ne conduit à aucun nouveau résultat : posant $\Phi_t = (uv^{-1} + t)v$ l'algèbre contractée par Φ_t est isomorphe à l'algèbre contractée par $uv^{-1} + t$.

Par contre un développement plus général, admettant d'autres endomorphismes v , w etc... pouvant être singuliers, mais tel que $\Phi_t = u + tv + t^2 w + \dots$ soit régulier pour $t \neq 0$, conduit à d'autres contractions. Le problème de la classification de ces contractions n'est pas résolu pour le moment.

Un autre problème non résolu est celui d'une équivalence entre

les endomorphismes de $L(V)$ conduisant à des algèbres contractées isomorphes. Par exemple, s'il existe un automorphisme ϕ de l'algèbre initiale μ , tel que $u = \phi^{-1} v \phi$, alors les algèbres contractées par $(u+t)$ et par $(v+t)$ sont isomorphes : $\mu_o^{(u)}(a,b) = \phi^{-1} * \mu_o^{(v)}(\phi_a, \phi_b)$. Mais on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante d'équivalence permettant d'associer "bijectivement" un couple (μ, u) avec une contraction μ_o .

1b) Première connexion avec la déformation

Intuitivement, il est clair que la contraction usuelle est une sorte de processus réciproque de la déformation. Nous allons montrer d'abord que

Si une algèbre de Lie μ se contracte dans une algèbre de Lie μ_o , alors μ_o se déforme dans l'orbite de μ .

Posons $f_t(a,b) = \phi_t^{-1}[\phi_t a, \phi_t b]$. Avec $\phi_t = u + t$. Il est facile de voir que f_t est une déformation de μ_o . En effet, on a sur V_N en considérant seulement la projection de f_t dans V_N :

$$f_t^{(N)}(a,b) = [a,b]_{oN} + t [a,b]_N \quad (\text{VI.4})$$

Sur V_R :

$$\begin{aligned} f_t^{(R)}(a,b) &= (u+t)^{-1}[(u+t)a, (u+t)b]_R \\ &= [a,b]_{oR} + t([a,b]_R - u^{-2}X(u,a,b)) \\ &\quad + t^2 u^{-3}X(u,a,b) + \dots + (-1)^p u^{-p+1} t^p X(u,a,b) + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

avec
$$X(u,a,b) = [ua, ub]_R - u \delta u(a,b)_R$$

Remarquons que sur V_N , $X(u,a,b)$ est nul, ce qui permet d'écrire une expression du type (VI.5) sur tout l'espace.

Or il est clair que dans un voisinage de l'origine $t \leq t_0$ le développement qui vient de celui de $(1 + tu^{-1})^{-1}$ est convergent. Par conséquent $f_t(a,b)$ est bien une déformation au sens géométrique de $[a,b]_0$. De plus pour $t \neq 0$, les algèbres déformées sont toutes isomorphes entre elles, ce qui signifie que la déformation de μ_0 a lieu dans l'orbite de μ .

Géométriquement, la contraction d'une algèbre μ conduit donc à une algèbre μ_0 qui est dans le bord de l'orbite de μ (dans l'adhérence de l'orbite de μ)

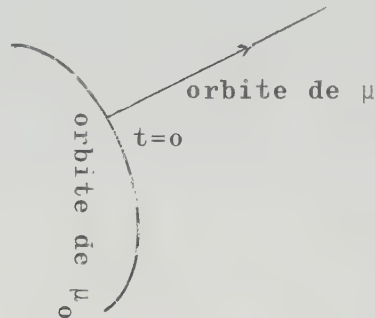


Fig. 1

Déformation de μ_0 dont l'orbite est représentée par une courbe, dans l'orbite de μ qui est une surface

On peut se demander si la réciproque de cette propriété est vraie : autrement dit, si une algèbre μ_0 qui se déforme dans l'orbite d'une algèbre μ est nécessairement une contraction de l'algèbre μ . Or avec la définition précédente de la contraction, on a tout de suite un contre-exemple en dimension trois.

Un exemple où la réciprocité contraction-déformation est mise en défaut :

Prenons pour algèbre μ_0 l'algèbre A_2 (Ch VII) sur $\mathbb{R}$.

$$A_2 = \begin{cases} [e_1, e_2] &= e_3 \\ [e_2, e_3] &= 0 \\ [e_3, e_1] &= 0 \end{cases}$$

A_2 se déforme manifestement dans l'orbite des rotations. Il suffit par exemple de considérer la déformation suivante :

$$\mu_t \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_2, e_3] = t e_1 \\ [e_3, e_1] = t e_2 \end{cases}$$

$\mu_t \approx A_9$ algèbre de Lie des rotations ($t = 1$).

Pour pouvoir contracter A_9 dans A_2 , il est nécessaire, d'après la remarque que nous avons faite au §1a), d'avoir un homomorphisme u de $A_2 \rightarrow A_9$. Les seuls homomorphismes^(*) de A_2 dans A_9 sont ceux qui envoient A_2 sur une sous-algèbre de dimension 1 de A_9 , seule sous algèbre nilpotente de A_9 . Ils sont de la forme :

$$u(e_1) = \lambda_1 x ; \quad u(e_2) = \lambda_2 x ; \quad u(e_3) = 0$$

Un calcul direct montre alors que ces homomorphismes ne peuvent pas conduire à une contraction de A_9 dans A_2 .

Remarque : Ce contre-exemple n'est valable que sur R . Sur C , en effet, l'algèbre correspondante à A_9 et A_8 s'écrit aussi avec $e_{\pm} = e_1 \pm ie_2$

$$[e_+, e_-] = 2ie_3$$

$$[e_3, e_+] = -ie_+$$

$$[e_3, e_-] = +ie_-$$

et ceci se contracte manifestement dans A_2 (il suffit de prendre $e'_+ = t e_+$, $e'_- = t e_-$, $e'_3 = e_3$).

2. Contractions plus singulières

2a) Définition

Ce résultat suggère d'examiner le cas $u=0$ et de reconsidérer la contraction (VL.1) avec d'autres applications Φ_t plus singulières à la limite $t = 0$.

(*) Il ne sont pas réduits à 0 comme nous l'avons indiqué par erreur dans [LN1].

Prenons une application

$$\Phi_t = tu + t^2 v + t^3 w + \dots \quad v \neq 0 \quad (\text{VI.6})$$

régulière pour $t \neq 0$.

De la même façon qu'au paragraphe précédent, nous nous limiterons dans la suite au cas $\phi_t = 1$. Sous sa forme la plus générale, une expression du type (VI.6) conduit à des contractions, mais on ne sait pas pour le moment donner une classification systématique des résultats.

Etudions la limite :

$$[a, b]_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b], \quad \text{avec } \Phi_t = t(u + t)$$

Nous pouvons procéder exactement de la même façon qu'en 1a), en utilisant la décomposition de l'espace vectoriel V en $V_R \oplus V_N$, par rapport à u .

- Sur V_R , u^{-1} existe, et par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (u + t)^{-1} t^2 [(u + t)a, (u + t)b]_R = 0$$

- Sur V_N , en utilisant la nilpotence de u :

$$(t + u)^{-1} = t^{-1} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{-1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{q-1} \left(-\frac{u}{t}\right)^n$$

q est le plus petit entier tel que $u^q = 0$ sur V_N .

Posons $f_t(a, b) = \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b]$; sur V_N , on a :

$$f_t(a, b)_N = \left(1 - \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t^2} + \dots\right) ([ua, ub]_N + t([a, ub]_N + [ua, b]_N) + t^2[a, b]_N) \quad (\text{VI.7})$$

Si la limite pour $t = 0$ existe, elle correspond à une algèbre μ_1 dont la loi est donnée par :

$$[a, b]_1 = u^2 [a, b]_N - u([ua, b]_N + [a, ub]_N) + [ua, ub]_N \quad (\text{VI.8})$$

Cette loi est donc seulement à valeurs dans V_N .

Le développement de $f_t(a, b)_N$ est en fonction de $[a, b]_1^{(*)}$:

$$\begin{aligned} f_t(a, b)_N = t^2 [a, b]_N + t(\delta u(a, b)_N) + [a, b]_1 - \frac{u}{t} [a, b]_1 + \frac{u^2}{t^2} [a, b]_1 \\ + \dots (-)^n \frac{u^n}{t^n} [a, b]_1 + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

Et par conséquent, une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'algèbre μ_1 est que :

$$u[a, b]_1 = 0 \quad (\text{VI.10})$$

La loi de l'algèbre contractée μ_1 s'écrit encore de la façon suivante :

$$\mu_1(a, b) = [a, b]_1 = [ua, ub] - u[a, b]_0 \quad (\text{VI.11})$$

où nous notons $[a, b]_0$ l'expression suivante :

$$[a, b]_0 = u^{-1} [ua, ub]_R + \delta u(a, b)_N \quad (\text{VI.12})$$

qui correspondait à l'algèbre de Lie contractée dans 1a).

Cette expression n'est pas en général une loi d'algèbre de Lie. Si l'on calcule l'identité de Jacobi, on trouve

$$\sum_{p(a, b, c)} [[a, b]_0, c]_0 = -\delta \mu_1(a, b, c) \quad (\text{VI.13})$$

$$(*) \text{ avec } \delta u(a, b) = [ua, b] + [a, ub] - u[a, b]$$

L'expression (VI.11) indique dans quelle mesure on peut parler d'une contraction plus singulière : la condition de contraction dans l'algèbre μ_0 (contraction de Saletan) signifie encore que l'algèbre μ_1 est abélienne. D'une certaine façon, l'algèbre μ_1 mesure ainsi le défaut de vérification de la condition d'existence de μ_0 .

On peut continuer ce processus en prenant des applications de plus en plus singulières $\Phi_t = t^n(u+t)$. Posons dans ce cas :

$$\mu_n(a,b) = [a,b]_n = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b] \quad (\text{VI.14})$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence de l'algèbre μ_n est :

$$u[a,b]_n = 0 \quad (\text{VI.15})$$

Et quand elle existe, μ_n est donnée par :

$$[a,b]_n = (-)^{n-1} u^{n-1} [a,b]_1 \quad (\text{VI.16})$$

Ici $[a,b]_1$ est défini par l'expression (VI.11), mais n'est pas en général une algèbre de Lie.

Ici encore, si l'algèbre contractée "à l'ordre n" existe, alors les algèbres d'ordre supérieure sont abéliennes. Si la condition d'existence à l'ordre n n'est pas satisfaite, on peut continuer le processus jusqu'à la valeur $n = q$, indice de nilpotence de u sur V_N .

L'algèbre μ_q correspondant à $\Phi_t = t^q(u+t)$ a pour loi :

$$[a,b]_q = (-)^{q-1} u^{q-1} [a,b]_1$$

et la condition d'existence est toujours vérifiée puisque $u[a,b]_q$ est automatiquement nul. Enfin μ_{q+1} est abélienne, ce qui montre que l'on peut toujours contracter une algèbre dans l'algèbre abélienne.

Résumons les résultats obtenus dans cette partie :

Tout endomorphisme u de $L(V)$ conduit à une contraction d'une algèbre donnée μ de la façon suivante : on considère les applications $\Phi_t^{(n)} = t^n (u+t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, il existe un entier minimum $N \leq q-1$ pour lequel la limite $\Phi_t^{(N)-1} \mu(\Phi_t^{(N)} a, \Phi_t^{(N)} b)$ existe. L'algèbre obtenue μ_N , qui peut être abélienne, s'appelle l'algèbre contractée d'ordre N . Les algèbres contractées d'ordre supérieur sont abéliennes.

On peut rassembler les différentes conditions d'existence dans un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} (a, b) & \xrightarrow{u \times u} & (ua, ub) & & & & \\ \downarrow & \searrow \Delta & \downarrow & & & & \\ [a, b]_0 & \xrightarrow{u} & [ua, ub] & \xrightarrow{u} & [a, b]_2 & \xrightarrow{u} & [a, b]_3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\text{où } \Delta(a, b) = [a, b]_1 = [ua, ub] - u[a, b]_0.$$

La condition d'existence de μ_0 est la condition de commutativité du diagramme : $\Delta(a, b) = 0 \quad \forall a, b \in V$.

Si $\Delta \neq 0$ et $u \circ \Delta = 0$, on peut contracter μ en μ_2 etc...

Si $u^i \circ \Delta = 0$ et $u^{i-1} \circ \Delta \neq 0$, l'algèbre μ peut être contractée en μ_i par l'application $\Phi_t^i = t^i (u+t)$.

Exemple en dimension 3

Reprenons l'exemple des rotations A_9 et de l'algèbre A_2 , sur $\mathbb{R}$ (§1). Nous avons vu qu'il n'existe pas de contraction "régulière" de A_9 dans A_2 . Il est cependant possible de contracter A_9 dans A_2 par une contraction singulière d'ordre 1.

Prenons dans la base e_1, e_2, e_3 déjà utilisée,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \Phi_t = t(u + t(1-u)), \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} e'_1 = te_1 \\ e'_2 = te_2 \\ e'_3 = t^2e_3 \end{cases}$$

La contraction par Φ_t conduit à l'algèbre

$$A_2 : \begin{cases} [e_1, e_2]_1 = e_3 \\ [e_2, e_3]_1 = 0 \\ [e_3, e_1]_1 = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, la contraction d'ordre 1 n'est qu'un produit de deux contractions d'Inonü-Wigner : la première avec $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire en faisant $e'_1 = te_1$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = te_3$, conduit à l'algèbre euclidienne. On peut ensuite contracter une nouvelle fois avec $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient l'algèbre A_2 . Il est par ailleurs possible d'intervertir le processus : contracter d'abord par w , puis par v . Tout se passe comme si l'on pouvait intervertir les limites et contracter par un produit $(v+t)(w+t)$, mais ceci est égal à $t(v+w) + t^2$ car $vow = wov = 0$. En effet, la contraction d'ordre 1 que nous avons considérée correspond à

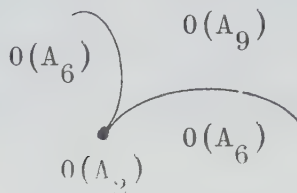
$$u = v + w$$

Il est peu vraisemblable que ce résultat soit général : on ignore cependant dans quelle mesure une contraction singulière d'un ordre donné est un "produit" d'autres contractions d'ordre inférieur.

Interprétation géométrique

Nous savons que la dimension des orbites est 3 pour A_2 , 5 pour l'algèbre A_7 (euclidienne), et 6 pour l'algèbre A_9 . Cela signifie que les points de l'orbite de A_2 sont plus singuliers que par exemple ceux de l'orbite de A_6 sur la variété L_3 . (le rang de l'application $df(u)$ (VII, §2) tombe en effet davantage en ces points). Les points de $0(A_6)$ étant eux-même plus singuliers que A_9 .

Nous pouvons imager cette situation de la façon suivante :



Le problème général des suites de contractions successives se traduit ici en un problème d'étude des différentes positions des singularités de L_n .

En résumé, les contractions "singulières" que nous avons obtenues, permettent d'atteindre des points eux-mêmes plus singuliers sur la variété des constantes de structure. A la limite, on peut toujours atteindre l'algèbre de Lie abélienne A_1 , située dans le bord de toutes les orbites. (La variété L_n est un cône de sommet A_1).

2b) Propriétés des contractions plus singulières

Les propriétés des algèbres contractées "régulières" données par Saletan ne s'étendent que partiellement aux algèbres plus singulières, et d'une façon assez curieuse.

Nous utiliserons dans cette partie les notations suivantes :

- Notations :
- μ_p^i sera l'algèbre contractée de μ par l'application $t^p(u^i + t)$ (algèbre contractée d'ordre p).
 - on appellera V_i le noyau de u^i
 - Enfin, pour simplifier les notations, on supprimera partout l'indice N dans les crochets $[a, b]_N$, car les calculs ne feront intervenir que les projections dans V_N .

Rappelons d'abord les principales propriétés des algèbres contractées "régulières", trouvées par Saletan.

Lemme 0 : S'il existe une contraction régulière de l'algèbre μ , associée à l'endomorphisme u (c'est-à-dire si (VI.1) existe avec $\Phi_t = u + t1$), alors il existe une suite d'algèbres contractées correspondant aux différentes puissances u^i de u . Toute algèbre $\mu_o^{(i+j)}$ s'obtient en contractant $\mu_o^{(i)}$ par u^j . La suite se termine quand $i = q$, plus petit entier tel que $V_R = u^q V = u^n V$ ($n = \text{dimension } V$). Autrement dit : $\mu_o^{(q+j)}$ est isomorphe à $\mu_o^{(q)}$ $j = 0, 1, 2, \dots$ (La suite peut se terminer avant).

Les résultats démontrés directement par Saletan sur le caractère non semi-simple des algèbres $\mu_o^{(i)}$ résultent du théorème de rigidité. Comme nous le verrons par ailleurs, plus loin (§5), la dimension du radical d'une algèbre ne peut pas diminuer par contraction : quand i croît, la partie résoluble de l'algèbre $\mu^{(i)}$ croît au dépend de la partie semi-simple. Cependant, dans une série déterminée (caractérisée par l'endomorphisme u), certaines constantes se manifestent.

D'après la condition d'existence de la limite (VL3) il est nécessaire que $u V$ soit une sous-algèbre de μ . Puisque les puissances de u contractent μ ainsi que les algèbres successives $\mu^{(i)}$, il en résulte que tous les sous-espaces $u^i V$ $i = 1, 2, \dots, q$ sont des sous-algèbres de toutes les algèbres $\mu, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ etc...

En particulier, la sous-algèbre V_R reste isomorphe dans tous les éléments de la suite. En fait, pour $x, y \in V_R$ on a :

$$\mu^{(i)}(x, y) = u^{-i} \mu(u^i x, u^i y)$$

$[u^i \text{ est une application régulière sur } V_R \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, q].$

A - COMPOSITION DES CONTRACTIONS ASSOCIEES AU MEME ENDOMORPHISME u

Dans le cas des contractions régulières, Saletan a démontré une propriété de composition des contractions. Notons $\mu_{0,0}^{i,j}$ l'algèbre obtenue en contractant l'algèbre μ_0^i par $(u^j + t)$. On a d'après le lemme 0 :

$$\mu_{0,0}^{i,j} = \mu_{0,0}^{j,i} = \mu_0^{i+j}$$

Dans le cas de contractions singulières, nous allons montrer les résultats suivants :

- l'algèbre $\mu_{1,1}^{i,j}$ existe et vérifie la même relation

$$\mu_{1,1}^{i,j} = \mu_{1,1}^{j,i} = \mu_1^{i+j}$$

- pour $p > 1$, $i > 1$ les algèbres μ_p^i sont abéliennes.

- seules les algèbres contractées d'ordre 0 ou 1 de μ_p^1 sont éventuellement non abéliennes.

Lemme 1 : Supposons que μ admette une contraction par $t^p(u + t\mathbb{I})$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Soit μ_p^1 l'algèbre contractée. Alors il existe une suite d'algèbres contractées d'ordre p , correspondant aux différentes puissances u^i de u .

Démonstration : elle est tout à fait analogue à celle donnée par Saletan dans le cas $p = 0$.

Partons de la condition nécessaire et suffisante d'existence de l'algèbre μ_p (VI.15, 16) : $p = 0, 1, 2, \dots$. En supprimant l'indice N , comme nous l'avons indiqué dans les notations, on a :

$$u^p([ua, ub] - u([ua, b] + [a, ub]) + u^2[a, b]) = 0 \quad (\text{VI.17})$$

Nous allons montrer que la même relation est vérifiée pour toutes les puissances de u , ce qui prouvera l'existence d'une algèbre contractée d'ordre p , par $t^p (u^i + t \mathbb{I})$. Pour cela on écrit cette relation de la façon suivante :

$$u^{p+2}[a, b] - u^{p+1}[ua, b] = u^{p+1}[a, ub] - u^p[ua, ub] \quad (\text{VI.18})$$

et on établit de proche en proche que :

$$u^r[a, b] - u^{r-1}[ua, b] = u^{p+1}[a, u^{r-p-1}b] - u^p[ua, u^{r-p-1}b] \quad (\text{VI.19})$$

pour $r \geq p + 2$.

Calculons $u^{(p+2)i}[a, b] - u^{(p+1)i}[a, u^i b]$ à l'aide de la relation précédente (VI.19). On a :

$$\begin{aligned} & u^{(p+1)i-(p+1)}(u^{i+(p+1)}[a, b] - u^{(p+1)}[a, u^i b]) \\ = & u^{(p+1)i-(p+1)}(u^{i+p}[ua, b] - u^p[ua, u^i b]) \\ = & u^{(p+1)i-(p+2)}(u^{i+p+1}[ua, b] - u^{p+1}[ua, u^i b]) \end{aligned}$$

De la même façon :

$$= u^{(p+1)i-(p+2)}(u^{i+p}[u^2 a, b] - u^p[u^2 a, u^i b])$$

Par récurrence, on arrive à :

$$\begin{aligned} = & u^{(p+1)i-(p+1)}(u^{p+i}[u^i a, b] - u^p[u^i a, u^i b]) \\ = & u^{(p+1)i}[u^i a, b] - u^{pi}[u^i a, u^i b] \end{aligned}$$

On retrouve donc la formule (VI.17) avec u^i à la place de u .

Contraction de μ_1^i

Supposons que μ se contracte par $t(u+t1)$, alors μ se contracte par $t(u^i + t1)$. Notons μ_1^i l'algèbre correspondante. Examinons les contractions de μ_1^i par $t^q(u^j + t)$, $j = 1, 2, \dots$, $q = 1, 2, 3, \dots$. Le cas $q = 0$ sera mentionné ultérieurement.

L'algèbre obtenue, notée $\mu_{1,q}^{i,j}$, si elle existe, admet comme loi l'expression suivante :

$$[a, b]_{1,q}^{i,j} = (-)^{q-1} u^{j(q-1)} ([u^j a, u^j b]_1^i - u^j [u^j a, b]_1^i - u^j [a, u^j b]_1^i + u^{2j} [a, b]_1^i) \quad (\text{VI.20})$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence est que :

$$u^j [a, b]_{1,q}^{i,j} = 0$$

Lemme 2 : L'algèbre $\mu_{1,q}^{i,j}$ existe pour $q \geq 1$

Remarquons d'abord que l'expression entre parenthèses dans $\mu_{1,q}^{i,j}$ est symétrique en i et j .

Notons

$$X(\mu, u)(a, b) = [ua, ub] - u[ua, b] - u[a, ub] + u^2[a, b] = [a, b]_1^1 \quad (\text{VI.21})$$

μ est l'algèbre de Lie initiale de loi $[,]$. On a :

$$X(\mu_1^i, u^j) = X(\mu_1^j, u^i) \quad (\text{VI.22})$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 X(\mu_1^i, u^j)(a, b) = & \\
 & [u^{i+j}a, u^{i+j}b] - u^i[u^{j+i}a, u^j b] - u^i[u^j a, u^{i+j}b] + u^{2i}[u^j a, u^j b] \\
 & - u^j\{[u^{i+j}a, u^i b] - u^i[u^{i+j}a, b] - u^i[u^j a, u^i b] + u^{2i}[u^j a, b]\} \\
 & - u^j\{[u^i a, u^{i+j}b] - u^i[u^i a, u^j b] - u^i[a, u^{i+j}b] + u^{2i}[a, u^j b]\} \\
 & + u^{2j}\{[u^i a, u^i b] - u^i[u^i a, b] - u^i[a, u^i b] + u^{2i}[a, b]\}
 \end{aligned}$$

En regroupant les termes "par colonne", on obtient le résultat annoncé.

L'algèbre μ_1^i appartient à V_i , donc l'expression entre parenthèses dans $\mu_{1,q}^{i,j}$ qui est $X(\mu_1^i, u^j)(a, b)$ est dans V_i , et d'après la symétrie également, dans V_j . Il en résulte que :

$$\mu_{1,q}^{i,j} \in u^{j(q-1)} (V_i \cap V_j)$$

Si $i \geq j$, $V_i \cap V_j = V_j$; pour $q \geq 1$, $\mu_{1,q}^{i,j} \in V_{j-j(q-1)}$ donc a fortiori $\mu_{1,q}^{i,j} \in V_j$ et la condition d'existence est vérifiée.

Si $i \leq j$, $V_i \cap V_j = V_i$, $\mu_{1,q}^{i,j} \in V_{i-j(q-1)} \subset V_j$ et la condition est également vérifiée.

Lemme 3 : Pour $q > 1$, l'algèbre $\mu_{1,q}^{i,j}$ est abélienne.

Remarquons que la loi de $\mu_{1,q}^{i,j}$ s'écrit encore de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } i \geq j : [a, b]_{1,q}^{i,j} &= (-)^{q-1} u^{j(q-1)} [u^i a, u^i b]_1^j \\
 \text{Pour } i \leq j : [a, b]_{1,q}^{i,j} &= (-)^{q-1} u^{j(q-1)} [u^j a, u^j b]_1^i
 \end{aligned} \tag{VI.24}$$

Cela vient de ce que les autres termes qui interviennent dans la définition sont de la forme :

$$u^{jq+i-j} [,]_1^j \quad \text{dans le 1er cas}$$

et $u^{jq-j+i} [,]_1^i \quad \text{dans le 2ème cas.}$

[et pour $j \geq i \quad j(q-1) + i \geq i$].

Il résulte de ces expressions que pour :

a) $i \geq j$: l'algèbre $\mu_{1,q}^{i,j}$ est abélienne dès que $j(q-1) \geq j$,
ce qui est vérifié dès que $q \geq 2$;

b) $i \leq j$: l'algèbre $\mu_{1,q}^{i,j}$ est abélienne dès que $j(q-1) \geq i$.

Or $j \geq i$ implique $j(q-1) \geq i(q-1)$

Pour $q \geq 2$, l'algèbre $\mu_{1,q}^{i,j}$ est donc abélienne.

Lemme 4 : $\mu_{1,1}^{i,j} = \mu_1^{i+j}$

Cela résulte de la propriété suivante :

$$(X(\mu, u^n)(a, b) - X(\mu, u^{n-1})(ua, ub)) = 0 \quad (\text{VI.25})$$

dès que $n-1 \geq 1$.

En effet, cette différence est égale à :

$$u^{2n}[a, b] - u^{2n-2}[ua, ub] - u^n[a, u^n b] + u^{n-1}[ua, u^n b] - u^n[u^n a, b] + u^{n-1}[u^n a, ub]$$

Si $n-1 \geq 1$, on peut utiliser la formule (VI.19) avec $p = 1$, ce qui donne en particulier :

$$- u^{n-2}(u^2[a, u^n b] - u[ua, u^n b]) = - u^{n-2}(u^{n+2}[a, b] - u^{n+1}[ua, b])$$

Finalement on obtient :

$$- u^{2n-2}([ua, ub] - u[ua, b] - u[a, ub] + u^2[a, b])$$

ce qui est toujours nul pour $n - 1 \geq 1$.

Utilisons l'expression de $\mu_{1,1}^{i,j}$.

$$\text{Pour } i \geq j, \quad [a, b]_{1,1}^{i,j} = [u^i a, u^j b]_1^j = X(\mu, u^j)(u^i a, u^j b)$$

Nous pouvons appliquer le résultat précédent puisque $j \geq 1$

$$X(\mu, u^j)(u^i a, u^j b) = X(\mu, u^{j+1})(u^{i-1} a, u^{j-1} b)$$

$$\text{et par récurrence} \quad = X(\mu, u^{i+j})(a, b).$$

Mais :

$$X(\mu, u^{i+j})(a, b) = [a, b]_1^{i+j}$$

De la même façon on voit que :

$$[u^j a, u^j b]_1^i = [a, b]_1^{i+j}$$

donc finalement que :

$$[a, b]_{1,1}^{i,j} = [u^i a, u^j b]_1^j = [u^j a, u^j b]_1^i = [a, b]_1^{i+j}$$

Conséquence : $\forall i, \quad \text{Im } \mu_1^i \subset V_1$

En effet, $\mu_{1,1}^{i,j} \in V_i \cap V_j$. Or d'après le lemme 4,

$$\mu_1^i = \mu_{1,1}^{1,i-1} \in V_1 \cap V_{i-1} = V_1.$$

Nous verrons que ceci exprime une propriété plus générale : la dimension de l'algèbre dérivée d'une algèbre de Lie ne peut pas croître par contraction.

Contraction de μ_p^1

Dans la suite, nous supposons que l'algèbre μ admet une contraction par $t^p(u+t)$. Rappelons que nous notons μ_p^1 l'algèbre ainsi contractée. On a, avec les notations précédentes (p.72) :

$$\mu_p^1(a,b) = (-)^{p-1} u^{p-1} X(\mu,u)(a,b)$$

et $u \cdot \mu_p^1(a,b) = 0$

D'après le lemme 1, les algèbres μ_p^i existent. Soit $\mu_{p,q}^{1,j}$ l'algèbre contractée de μ_p^1 par $t^q(u^j+t)$.

Lemme 5 : L'algèbre $\mu_{p,q}^{1,j}$ existe pour $q \geq 1$ et est abélienne dès que $q > 1$

$$\begin{aligned} \mu_{p,q}^{1,j}(a,b) &= (-)^{q-1} u^{j(q-1)} X(\mu_p^1, u^j)(a,b) \\ &= (-)^{p+q-2} u^{p-1+j(p-1)} X(X(\mu,u), u^j)(a,b) \end{aligned}$$

Par hypothèse, μ_p^1 existe, d'où $u^p \cdot X(\mu,u)(a,b) = 0$.

Il est clair d'après la définition de X que

$$X(X(\mu,u), u^j) \in V_p \quad \text{si} \quad X(\mu,u) \in V_p$$

Par conséquent $\mu_{p,q}^{1,j} \in u^{p-1+j(q-1)} V_p$

et $u^j \cdot \mu_{p,q}^{1,j} \in u^{p+jq-1} V_p$

Ceci est nul dès que $j \geq 1$, c'est-à-dire dès que $q \geq 1$. Il en résulte l'existence de l'algèbre $\mu_{p,q}^{1,j}$ pour $q \geq 1$.

De la même façon $u^{p-1+j(q-1)}V_p$ est nul dès que : $j(q-1) \geq 1$, c'est-à-dire dès que $q \geq 2$. L'algèbre $\mu_{p,q}^{1,j}$ est donc abélienne pour $q \geq 2$.

Pour $q = 1$, on a :

$$\mu_{p,1}^{1,j} = [u^j a, u^j b]_p^1$$

Comme $\mu_{p,1}^{1,j} \in V_1$, on obtient aussi

$$\mu_{p,1,1}^{1,j,i} = \mu_{p,1}^{1,j} (u^i a, u^i b) = [u^{i+j} a, u^{i+j} b]_b^1$$

$$\mu_{p,1,1}^{1,j,i} = \mu_{p,1}^{1,i+j}$$

On obtient ainsi une suite d'algèbres contractées $\mu_{p,1}^{1,i}$.

Lemme 6 : Pour $j \geq i$, $\mu_p^{i+j} = u^{j(p-1)} \mu_{p,1}^{i,j}$ $p \geq 1$

Remarquons d'abord que $\mu_{p,1}^{i,j}$ existe quand $j \geq i$, car

$$\mu_{p,1}^{i,j} = X(\mu_p^i, u^j)(a, b)$$

et $X(\mu_p^i, u^i) \in V_i$,

donc $\mu_{p,1}^{i,j}$ est aussi dans V_i et a fortiori dans V_j .

Quand $j \geq i$, $X(\mu_p^i, u^j)(a, b)$ se réduit à :

$$[u^j_a, u^j_b]_p^i = (-)^{p-1} u^{i(p-1)} X(\mu, u^i)(u^j_a, u^j_b)$$

Utilisons alors la relation suivante qui s'établit de façon analogue à celle que nous avons vu dans le cas $p = 1$ (VI.25) :

$$u^m(X(\mu, u^n)(a, b) - X(\mu, u^{n-1})(ua, ub)) = 0 \quad (\text{VI.26})$$

pour toutes les valeurs de m et n telles que $m + n - 1 \geq p$.

On en déduit :

$$u^{(i+j)(p-1)}(X(\mu, u^{i+j})(a, b)) = u^{(i+j)(p-1)} X(\mu, u^i)(u^j_a, u^j_b)$$

car $(i+j)(p-1) + i = j(p-1) + ip \geq p$ pour $p = 1, 2, 3, \dots$

D'où

$$\begin{aligned} \mu_p^{i+j}(a, b) &= (-)^{p-1} u^{(i+j)(p-1)} X(\mu, u^{i+j})(a, b) \\ &= (-)^{p-1} u^{(i+j)(p-1)} X(\mu, u^i)(u^j_a, u^j_b) \\ &= u^{j(p-1)} \mu_{p,1}^{i,j} \end{aligned}$$

Conclusion : L'algèbre μ_p^i est abélienne dès que $i > 1$, et $p > 1$.

En effet, si $i - 1 \geq 1$

$$\mu_p^i(a, b) = \mu_p^{1+(i-1)}(a, b) = u^{(i-1)(p-1)} \mu_{p,1}^{1,i-1}$$

Or $\mu_{p,1}^{1,i-1} \in V_1$, μ_p^i est donc abélienne dès que $(i-1)(p-1) \geq 1$.

Composition avec une contraction régulière

L'existence d'une algèbre contractée à l'ordre p n'implique pas automatiquement l'existence d'une contraction régulière ultérieure de celle-ci.

Il faut des conditions supplémentaires :

Dans le cas d'une algèbre $\mu_1^i : \mu_{1,0}^{i,j}$ existe si et seulement si μ_1^{i+j} est abélienne.

En effet, $\mu_{1,0}^{i,j}$ est dans V_1 . La condition d'existence devient donc

$$\begin{aligned} u^j \mu_{1,0}^{i,j}(a,b) &= 0 = \mu_1^i(u^j a, u^j b) \\ &= \mu_1^{i+j}(a,b) \text{ d'après le lemme 4.} \end{aligned}$$

Nous retrouvons ici le fait que l'existence de l'algèbre contractée à l'ordre 0 entraîne la nullité des algèbres contractées d'ordre supérieure.

De même les algèbres $\mu_{p,0}^{1,j}$ existent si $\mu_p^1(u^j a, u^j b) = 0$, c'est-à-dire si $u^j V$ forme une sous-algèbre abélienne de μ_p^1 . Et dans ce cas

$$\mu_{p,0}^{1,j}(a,b) = \delta(u^j, \mu_p^1)(a,b) = [u^j a, b]_p^1 + [a, u^j b]_p^1$$

$$(\delta(u^j, \mu_p^1) = \delta u^j \text{ par rapport à la loi } \mu_p^1).$$

B - PROPRIETES DES CONTRACTIONS SINGULIERES

Lemme 7 : Les contractions d'ordre $p, p \geq 1$, conduisent à des algèbres nilpotentes.

Démonstration : Rappelons qu'on définit les termes $\mathfrak{C}^i_\mu$ de la suite centrale descendante d'une algèbre de Lie μ par :

$$\mathfrak{C}^0_\mu = V, \quad \mathfrak{C}^i_\mu = [V, \mathfrak{C}^{(i-1)}_\mu]$$

μ est dite nilpotente s'il existe k tel que $\mathfrak{C}^k_\mu = 0$.

On a pour $p \geq 1$:

$$[V, u^m V_{m+1}]^1_p \subset u^{m+p} V_{m+p+1}$$

Supposons que $b \in u^m V_{m+1}$, $b = u^m b'$ et $ub = 0$:

$$\begin{aligned} [a, b]^1_p &= (-)^{p-1} u^{p-1} (-u[ua, b] + u^2[a, b]) \\ &= (-)^{p-1} (-u^p[ua, u^m b'] + u^{p+1}[a, u^m b']) \end{aligned}$$

Appliquons la formule (VI.19) avec $m = r - (p+1)$, on obtient

$$[a, b]^1_p = (-)^{p-1} (u^{m+p+1}[a, b'] - u^{m+p}[ua, b'])$$

Donc

$$[a, b]^1_p \in u^{m+p} V \cap V_1 = u^{m+p} V_{m+p+1}$$

Par hypothèse, $\mathfrak{C}^1_{\mu_p}$ est contenu dans V_1 (c'est la condition d'existence de μ_p). Appliquons alors le résultat précédent, on en déduit par récurrence que

$$\mathfrak{C}^i(\mu_p^1) \in u^{(i-1)p} V_{ip+1}$$

Appelons q l'indice de nilpotence de u , plus petit indice tel que

$$u^q V = V_R$$

Alors pour $k = [1 + \frac{q}{p}]$, $\mathfrak{S}^k(\mu_p^1)$ est nul, car

$$\mathfrak{S}^k(\mu_p^1) \in u^k V \cap V_1 \in V_R \cap V_1 = 0$$

Lemme 8 : Les contractions régulières avec des endomorphismes nilpotents conduisent à des algèbres nilpotentes.

Supposons que μ admette une contraction par $(u + t1)$ avec u nilpotent.

$$\text{Dans ce cas} \quad V_R = 0$$

$$V_N = V$$

et l'algèbre contractée μ_o est simplement :

$$\mu_o(a, b) = \delta u(a, b) = [ua, b] + [a, ub] - u[a, b]$$

De la condition d'existence, on déduit encore :

$$u^r[a, b] - u^{r-1}[ua, b] = u[a, u^{r-1}b] - [ua, u^{r-1}b]$$

et de la même façon que précédemment, on voit que : pour $b \in u^{m-1} V_m$, c'est-à-dire $b = u^{m-1} b'$, $ub = 0$, on a :

$$\mu_o(a, u^{m-1} b') \in u^{m-1} V$$

Par conséquent, si q est l'indice de nilpotence, $\mathfrak{S}^q(\mu_o) = 0$.

3. D'autres algèbres contractées

D'autres définitions de la contraction ont été proposées, qui correspondent à des structures d'algèbres contractées par des endomorphismes différents de celui que nous avons particulièrement étudié : ce sont celles étudiées par G. Berendt d'une part [B1] et par H.D. Doebner et O. Melsheimer d'autre part [D-M]. Nous allons montrer qu'il s'agit de contractions par des endomorphismes $\Phi(t)$ de $L(V_k) \otimes k((t))$ différents de ceux que nous avons étudiés, plus généraux en un sens, puisqu'ils comportent des termes à tous les ordres en t , et cependant très particuliers parce que ces termes sont essentiellement des endomorphismes diagonaux. (Ce qui invite à introduire la même structure avec des endomorphismes un peu plus généraux comme nous le verrons).

Soit $V = \bigoplus_i V_i$ une décomposition de l'espace vectoriel V . On introduit la notation :

$$\mu(V_i, V_j) \Big|_{V_k} = \{ \mu(x, y) \Big|_{V_k} \mid x \in V_i, y \in V_j \}$$

où $\mu(x, y) \Big|_{V_k}$ signifie la projection de $\mu(x, y)$ sur V_k .

Définition 1 [B1] : Soit une algèbre de Lie. L'algèbre contractée V est définie par la limite suivante (quand elle existe) :

$$\mu(V_i, V_j) \Big|_{V_k} = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_{ij}^k(t) \mu(V_i, V_j) \Big|_{V_k}$$

avec

$$\Phi_{ij}^k(t) = \varphi_i(t) \varphi_j(t) \varphi_k^{-1}(t)$$

où les $\varphi_i(t)$ sont des applications d'un intervalle $[0, t_0]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ suivant que μ est réelle ou complexe), continues en t , et différentes de 0 pour $0 < t \leq t_0$, éventuellement nulles pour $t = 0$.

(Cf. aussi [D-M].)

Le procédé introduit par Berendt consiste alors à ordonner les espaces V_i de telle sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{i+1}(t)/\varphi_i(t) = 0$$

ce qui ne restreint pas la généralité du problème.

La condition d'existence d'une contraction régulière (d'ordre 0) est alors que $\mu(V_1, V_1)|_{V_k} = 0$ pour $k \neq 1$. Elle signifie que V_1 est une sous-algèbre de V , qui est de plus stable par contraction. Si l'espace se décompose en $V_1 \oplus V_2$, ce cas correspond à la contraction d'Inonü et Wigner.

Examinons le rapport de la définition précédente avec la définition générale d'une contraction :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b]$$

La définition 1 revient à choisir pour application Φ_t une somme directe d'applications scalaires correspondant à la décomposition $V = \oplus V_i$:

$$\Phi_t = \bigoplus_i \Phi_t^i$$

Pour $t \neq 0$, Φ_t est bien régulière, puisque les Φ_t^i sont la multiplication par un scalaire $\varphi_i(t)$ non nul. Par contre la limite de Φ_t peut être une application singulière.

Pour établir le lien avec les déformations singulières que nous avons introduites au paragraphe 2, nous devons faire une hypothèse supplémentaire sur les fonctions $\varphi_i(t)$. Supposons qu'au moins une puissance de $\varphi_i(t)$ soit analytique au voisinage de zéro, posant $t' = t^\alpha$, nous pourrions nous ramener au cas où :

$$\varphi_i(t) = t^{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}^i + t^{\alpha_i+1} \lambda_{\alpha_i+1}^i + t^{\alpha_i+2} \lambda_{\alpha_i+2}^i + \dots$$

Si $\alpha_1 = 0$, si $\lambda_{\alpha_1}^1 \neq 0$, la contraction est régulière.

Φ_f est ainsi en général de la forme

$$\Phi_t = t^p(u + t v + t^2 w + \dots)$$

Supposons alors que les espaces vectoriels V_i soient ordonnés de telle sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1}(t)}{\varphi_i(t)} = 0$$

Posant $\alpha_1 = p$, si $\lambda_{\alpha_1}^1 \neq 0$, on a $\alpha_2 \geq \alpha_1 + 1$, $\alpha_3 \geq \alpha_2 + 1$ etc..., et en introduisant des $\lambda_{\alpha_i}^i$ éventuellement nuls, on voit que les endomorphismes u, v etc... ont, dans α_i ce cas, la forme

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_p^1 & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & 0 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} \lambda_{p+1}^1 & & \\ \hline & \lambda_{p+1}^2 & \\ \hline & & 0 \end{pmatrix}$$

etc... Ici λ_p^i représente une matrice $(i \times i)$ diagonale, d'éléments diagonaux étant égaux à λ_p^i . (Certains sous-espaces intermédiaires V_i peuvent être vides).

Il est remarquable que pour ces contractions aussi on ait un résultat analogue à celui que nous avons montré au paragraphe précédent, lemme 1.

Excepté dans le cas de la contraction régulière, les algèbres obtenues sont nilpotentes.

En effet, l'algèbre contractée applique $V_i \times V_j$ dans V_k , où V_k correspond à la puissance α_k de t , telle que $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k$. La représentation adjointe est donc nilpotente dès que $\alpha_i \neq 0 \forall i$.

Définition 2 : Tout en conservant la même structure, on voit qu'il est naturel d'étendre la définition 1 à des applications non scalaires. Il suffit de prendre une application :

$$\Phi_t = \bigoplus_i \Phi_t^i$$

où Φ_t^i est une application de V_i dans V_i régulière quand $t \neq 0$ (*), singulière d'ordre α_i quand $t = 0$. (C'est-à-dire de la forme $t^{\alpha_i} u_i$ modulo des termes d'ordre supérieur).

Ordonnons les espaces V_i par rapport au degré α_i . Si les u_i , qui sont des éléments de $L(V_i)$ sont des applications régulières de V_i , nous nous retrouvons essentiellement dans la situation précédente.

L'algèbre contractée par Φ_t sera encore telle que :

$$V_i \times V_j \rightarrow V_k$$

avec $\alpha(i) + \alpha(j) = \alpha(k)$.

En effet, pour $a \in V_i$, $b \in V_j$ considérons la loi de l'algèbre contractée restreinte à V_k :

$$[a, b]_{V_k}' = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t^{-1} [\Phi_t a, \Phi_t b] \Big|_{V_k} = \lim_{t \rightarrow 0} (\Phi_t^k)^{-1} [\Phi_t^i a, \Phi_t^j b] \Big|_{V_k}$$

on a :

$$\Phi_t^i = t^{\alpha_i} u_i + t^{\alpha_i+1} v_i + \dots$$

et

$$(\Phi_t^k)^{-1} = t^{-\alpha_k} u_k^{-1} (1 - t(u^{-1}v)^{-1} + \dots)$$

puisque les applications u_i sont régulières.

(*) nous supposons toujours que Φ_t^i est une application suffisamment régulière en t .

La limite se ramène donc à :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k} u_k^{-1} [u_i a, u_j b]_{V_k}$$

Si elle existe, l'algèbre contractée sera donnée par :

$$[a, b]_{V_k}' = u_k^{-1} [u_i a, u_j b]_k \quad \begin{cases} a \in V_i \\ b \in V_j \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

Et la condition nécessaire et suffisante d'existence est que dans l'algèbre initiale on ait :

$$[u_i a, u_j b]_{V_k} = 0 \quad (\text{VI.28})$$

pour tous les espaces V_k tels que $\alpha(k) > \alpha(i) + \alpha(j)$.

En particulier, s'il existe V_i tel que $\alpha(i) = 0$ (cas d'une contraction régulière), alors $(u V_i)$ doit être une sous-algèbre de l'algèbre initiale, et l'on retrouve des résultats de Saletan. (On voit que ceci présente beaucoup d'analogie avec la méthode de Saletan pour "sauver une représentation").

Il est toujours possible d'indicer les espaces V_i de telle sorte que $V_i \times V_j \rightarrow V_{i+j}$. La condition précédente (VI.27) montre donc que l'algèbre initiale a une structure d'algèbre filtrée, avec

$V_i = \bigoplus_{k \leq i} V_k$, et l'algèbre contractée est isomorphe au gradué associé.

Ceci montre que l'on aurait la même structure en partant de puissances négatives de t . Comme on le voit en remplaçant les Φ_t^i par leur inverse, (par exemple).

Si les endomorphismes u_i ne sont plus réguliers on obtient des résultats analogues. Supposons par exemple que les endomorphismes u_i soient nilpotents, et que $\Phi_t^i = t^{\alpha_i} (u_i + t \mathbb{I})$.

Posons $X(u_i, u_j, u_k)(a, b)$

$$\begin{aligned} X(u_i, u_j, u_k)(a, b) &= [u_i a, u_j b] - u_k([u_i a, b]_k \\ &+ [a, u_i b]_k) + u_k^2[a, b]_k \quad \text{pour } a \in V_i, b \in V_j \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

Alors si p est l'ordre minimal de contraction possible, c'est-à-dire si p est le plus petit entier tel que :

$$u_k^p \cdot X(u_i, u_j, u_k) = 0$$

la loi de l'algèbre contractée correspondante est

$$\begin{aligned} [a, b]_k' &= (-)^{p-1} u_k^{p-1} X(u_k, u_i, u_j)(a, b) \\ a &\in V_i, \quad b \in V_j \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

où V_k est l'espace correspondant à :

$$\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j + 1 - p$$

Dans ce cas, l'algèbre contractée est telle que :

$$[V_i, V_j]' \Big|_{V_k} = 0 \quad (\text{VI.31})$$

pour tout $V_{k'}$ d'ordre inférieur à V_k : $\alpha_{k'} < \alpha_i + \alpha_j + 1 - p$.

Avec l'hypothèse que nous avons faite sur p , la condition d'existence de l'algèbre contractée implique que, dans l'algèbre initiale

$$[V_i, V_j] \Big|_{V_k} = 0 \quad \text{si}$$

$$\alpha_k > \alpha_i + \alpha_j + 1 - p.$$

4. Déformation, spécialisation et contraction

(Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec Michèle Vergne).

Un récent article de F.J. Flanigan [F] montre que sur C il y a équivalence entre déformation et spécialisation [Ch.0].

Avec $k = C$, on a le :

Lemme 1 [F] : Soit $\bar{x} \rightarrow x$ une spécialisation k -rationnelle dans Ω^n (*). Alors il existe n^3 séries $K_{ijk} \in k[[t]]$, telles que $K = (K_{ijk})$, et $\bar{x}$ soient k -équivalents sur x ; c'est-à-dire telles que, avec $x = (x_{ijk})$, $\bar{x} = (\bar{x}_{ijk})$

$$i) \quad K_{ijk}(0) = x_{ijk}.$$

ii) L'application $K_{ijk} \rightarrow \bar{x}_{ijk}$ définit un k -isomorphisme de $k[K] \rightarrow k[\bar{x}]$.

Nous avons vu que toute contraction régulière ou singulière d'une algèbre μ , appartient à l'adhérence de l'orbite de μ , $\overline{0(\mu)}$. Les résultats de Flanigan vont nous permettre d'affirmer une propriété réciproque avec $k = C$:

Lemme 2 : Soit μ^1 un élément de $\overline{0(\mu)}$, $\mu^1 \in \overline{GL(V_k) \cdot \mu}$, et $\mu^1 \notin GL(V_k) \cdot \mu$. Alors il existe une déformation formelle μ_t de μ^1 telle que :

$$\mu_t \in GL(V_{\overline{k((t))}}) \cdot \mu$$

Montrons d'abord que si μ est une algèbre de Lie sur k , la recherche de l'adhérence de l'orbite de μ $0(\mu) = GL(V) \cdot \mu$ sur V_k se ramène au cas où k est algébriquement clos. (Bien que le résultat soit général, il nous suffit de l'avoir pour $k = \mathbb{R}$). En effet, on a le :

(*) μ domaine universel au sens de Weil [W].

Lemme 3 : Soit μ une algèbre de Lie réelle. Il y a équivalence entre :

$$\mu^{(1)} \in \overline{\mathrm{GL}(V_R) \cdot \mu} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \mu^{(1)} \otimes \mathbb{C} \in \overline{\mathrm{GL}(V_C) \cdot (\mu \otimes \mathbb{C})} \quad \text{sur } \mathbb{C}$$

Pour trouver les algèbres appartenant à l'adhérence d'une algèbre de Lie réelle, il suffit donc de chercher dans l'adhérence de l'orbite de l'algèbre complexifiée, quelles sont les algèbres définies sur $\mathbb{R}$.

Démonstration du lemme 2 : Elle repose sur le résultat suivant utilisé par Flanigan dans lequel k est un corps quelconque.

Soit X une k -variété affine dans Ω^m (qui est un domaine universel au sens de Weil [W]), et Z un sous-ensemble k -fermé propre contenant un point k -rationnel x . Alors il existe une courbe k -fermée Γ dans X , passant par x , telle que $\Gamma \cap Z$ soit fini.

Si $\mu^{(1)} \in \overline{\mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu} = \overline{0(\mu)}$ et $\mu^{(1)} \notin \mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu$, $\mu^{(1)}$ appartient à un fermé propre de $0(\mu)$ (car $\mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu$ est ouvert dans son adhérence pour la topologie de Zariski). Alors il existe une courbe Γ , k -fermée passant par $\mu^{(1)}$ et se rencontrant $\overline{\mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu} - \mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu$ qu'en un nombre fini de points. Il existe donc un point générique de Γ sur k , et $\mu^{(1)}$ est une k -spécialisation de ce point. D'après le lemme 1, on peut représenter ce point générique de Γ par une série formelle $\mu[[t]]$ telle que $\mu(0) = \mu^{(1)}$. On voit alors que si $k((t))$ désigne la fermeture du corps des séries formelle :

$$\mu[[t]] \in \mathrm{GL}(V_{k((t))}) \cdot \mu$$

Cela vient en effet de ce que $\mu[[t]] \in \overline{\mathrm{GL}(V_k) \cdot \mu}$ donc encore à $\overline{\mathrm{GL}(V_{k((t))}) \cdot \mu}$. Comme $\mathrm{GL}(V_{k((t))}) \cdot \mu$ est ouvert dans son adhérence, la condition sur Γ ($\Gamma \cap Z$ fini) implique que $\mu[[t]] \in \mathrm{GL}(V_{k((t))}) \cdot \mu$.

Supposons $k = \mathbb{C}$.

D'après le théorème de Puyseux, on sait que le corps $C((t))$ est l'ensemble des extensions de C par toutes les puissances fractionnaires $t^{1/n} : C(t^{1/n})$ avec $n = 1, 2, \dots$

Soit $\varphi(t) \in GL(V_{\overline{k((t))}})$ tel que

$$\mu[[t]] = \varphi(t) \cdot \mu$$

On peut toujours mettre $\varphi(t)$ sous la forme d'une série entière de $t^{1/k}$ (en réduisant au même dénominateur).

Par conséquent, en posant $t^{1/k} = t'$, on voit que le point $\mu^{(1)} = \mu(0)$ est bien la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot \mu$ où $\varphi(t)$ est une série entière en t (à coefficient dans $GL V$).

Remarque : Si $\varphi[[t]]$ est une série inversible dans $GL(V_k)$ $k = k((t))$, d'inverse $\psi((t)) = t^{-1} (\psi_0 + t \psi_1 + \dots + t^i \psi_i + \dots)$, considérons l'ensemble des $v_p(x, y) = \sum_{i+j+k=p} \varphi_i \mu(\psi_j x, \psi_k y)$, alors le premier élément non nul $p = 0, 1, \dots, \infty$ (et il en existe nécessairement un si μ n'est pas abélienne) est une contraction de μ . On peut vérifier ainsi les résultats obtenus avec $\varphi((t)) = u + t \mathbb{I}$.

5. Quelques résultats généraux sur les contractions et les déformations

L'algèbre contractée μ' d'une algèbre μ s'obtient par une limite d'algèbres μ_t isomorphes à μ . C'est donc un point dans l'adhérence de l'orbite de μ , extrémité d'un chemin dans cette orbite :

$$\mu' \in \overline{0(\mu)}$$

Soit μ'' une contraction de μ' , alors $\mu'' \in 0(\mu)$. Autrement dit $\overline{0(\mu')} \subset \overline{0(\mu)}$.

Cela résulte de la définition de l'adhérence.

Tout ensemble fermé de la variété L_n invariant sous l'action du groupe $GL(V)$ est stable par contraction. Par conséquent, d'après les résultats connus sur la variété L_n (Cf. I), on a :

- a) toute algèbre contractée d'une algèbre résoluble est résoluble.
- b) toute algèbre contractée d'une algèbre nilpotente est nilpotente.
- c) toute algèbre contractée d'une algèbre unimodulaire est unimodulaire.

d) l'ensemble des algèbres μ dont la dimension de l'algèbre dérivée est inférieure ou égale à p : $\dim \mathfrak{D}^1(\mu) \leq p$ est un fermé de L_n . Il en résulte que si μ' est une contraction de μ , $\dim \mathfrak{D}^1(\mu') \leq \dim \mathfrak{D}^1(\mu)$.

e) Dans [V], M. Vergne a montré que : l'ensemble des points μ tels que :

$$\dim Z^p(\mu, V) \geq q$$

est un fermé dans L_n où V est un μ -module pour la représentation adjointe ainsi que l'ensemble des algèbres μ telles que :

$$\dim B^p(\mu, V) \leq q .$$

Il en résulte en particulier que :

- si μ' est une contraction de μ , alors :

$$\dim Z^2(\mu', V) \geq \dim Z^2(\mu, V)$$

c'est-à-dire que la dimension de la variété linéaire tangente (.) ne peut pas décroître par contraction.

- si μ' est une contraction de μ , alors :

$$\dim B^2(\mu', V) \leq \dim B^2(\mu, V)$$

La dimension de l'orbite de l'algèbre décroît par contraction.

f) Le radical de l'algèbre contractée est de dimension supérieure ou égal au radical de l'algèbre initiale. Cela résulte, par exemple, du théorème de Richardson sur la rigidité des sous-algèbres semi-simples.

g) Indiquons enfin une autre méthode qui permet de démontrer facilement des résultats analogues aux précédents.

Soit f une application de $E \rightarrow F$ (deux variétés quelconques) de rang ρ au point p (c'est-à-dire telle que le rang de l'application différentielle $df(p)$ soit égale à ρ). Alors si p' est un point voisin de p , le rang de f au point p' est supérieur ou égal au rang de f au point p .

Cela se voit, par exemple [Wh1] en choisissant un système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$ dans E , au voisinage de p , $(y^1, \dots, y^m)$ dans F au voisinage de $f(p)$, de telle sorte que f soit l'application :

$$\begin{cases} y^i = x^i & i \leq \rho \\ y^j = \Phi^j(x^1 \dots x^n) & j > \rho \end{cases}$$

Le Jacobien est :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ J'' & J' \end{vmatrix} \quad J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^{p+1}}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^{p+1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

1 = matrice unité $(\rho \times \rho)$

et par hypothèse J' est nul au point (p) , on a donc :

$$\text{rang}(J) = \rho + \text{rang}(J')$$

donc

$$\text{rang } df(p') \geq \text{rang } df(p)$$

Donnons 2 exemples :

Prenons pour f l'application introduite, par exemple, en [Ri2]

$$L^2(V,V) \xrightarrow{f} L^3(V,V)$$

$$\mu \rightarrow f(\mu) = \mu \wedge \mu$$

alors l'application différentielle $df(\mu)$ si μ est une algèbre de Lie, est : $df(\mu) \cdot \varphi = -\delta^\mu \varphi$ où $\varphi \in L^2(V,V)$, donc le rang de f au point μ est la dimension de $B^3(\mu, \mu)$: $\dim B^3(\mu, \mu) = n^2(n-1)/2 - \rho$ si ρ est la dimension de $Z^2(\mu, \mu)$.

Appelons S_ρ les algèbres μ telles que $\dim Z^2(\mu, \mu) = \rho$.

On retrouve ainsi les résultats de (e) formulés en termes de déformation :

| Si $\mu' \in S_\rho$, se déforme dans l'orbite de μ , alors $\mu \in S_\rho$ avec $\rho \leq \rho'$

Pour avoir des résultats sur les orbites, on considère l'application $\mu \rightarrow d0_\mu$ de L_n dans $L(GL(V), L_n)$ avec $0_\mu(g) = g \cdot \mu$. L'application $\mu \rightarrow d0_\mu$ est linéaire en μ et son rang est égal à : $\dim GL(V) \times \dim B^2(\mu, \mu)$. Donc, de la même façon, on retrouve le résultat

| Si μ est une déformation de μ' :

$$\dim B^2(\mu, \mu) \geq \dim B^2(\mu', \mu')$$

En conclusion, on voit que les algèbres déformées sont de moins en moins commutative, de moins en moins "singulières". Il n'existe pas forcément de déformations semi-simple d'une algèbre donnée (par exemple, il n'en existe pas pour une algèbre qui n'est pas unimodulaire), mais on voit que sur une composante donnée de L_n , les algèbres les moins singulières forment des familles rigides.

VII - L'EXEMPLE DES ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSION 3

L'étude de la dimension 3, outre sa simplicité qui permet d'obtenir une description complète de la variété L_3 , présente un intérêt heuristique certain : à la différence des dimensions suivantes (4,5), il existe des algèbres semi-simples de dimension 3, et donc une composante irréductible de la variété correspondant à l'adhérence de l'orbite de ces algèbres. Par ailleurs on trouve déjà sur L_3 des propriétés qui semblent générales, comme l'existence d'une famille continue d'orbites dépendant d'un paramètre.

Ce chapitre comporte trois parties :

1. L'étude de la structure sur $\mathbb{R}$ de la variété L_3 : liste des différents orbites, et calcul direct de leur dimension.
2. Des remarques sur la situation plus ou moins singulière de ces différentes orbites sur la variété L_3 .
3. Une étude des différentes déformations possibles, et en particulier des espaces $Z^2 \text{ int}(\mu, \mu)$.

1. Structure de la variété L_3 : des algèbres de Lie de dimension 3 sur $\mathbb{R}^*$.

On connaît la classification des algèbres de Lie de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ (Jacobson) et sur $\mathbb{R}$ (thèse de Sharp). [Sh]
La description que nous donnons ici est différente, et nous semble plus facilement s'adapter à l'étude des différentes orbites et des déformations. Cette méthode est due à L. Michel.

* On trouve aussi une description de la variété sur $\mathbb{C}$ dans [Ra].

Le groupe agissant sur L_3 est $GL(3, \mathbb{R})$: il est formé de deux composantes connexes, et par conséquent il n'est pas exclu que certaines orbites soient également non connexes* .

Sous l'action du groupe les constantes de structure sont transformées en :

$$C'_{ij}{}^k = \sum_{l,h,m} g^{-1}{}_i{}^l g^{-1}{}_j{}^h C_{lh}{}^m g_m{}^k \quad i,j,\dots = 1, 2, 3 \quad (\text{VII.1})$$

(Cf. I,5) où $g = (g_i{}^j) \in GL(3, \mathbb{R})$

Il est possible dans le cas particulier de la dimension 3 de représenter une algèbre de Lie par une matrice (3x3). Les éléments ρ^{lk} $l,k = 1, 2, 3$ de cette matrice sont définis par :

$$C_{ij}{}^l = \rho^{lk} \varepsilon_{ijk} \quad 1 \leq i, j, k \leq 3 \quad (\text{VII.2})$$

ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique usuel.

La transformation sur les matrices correspondant à la transformation (VII.1) est alors :

$$\rho'^{lk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} C'_{ij}{}^l = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (g^{-1})_i{}^m (g^{-1})_j{}^n \rho^{l'k'} \times \varepsilon_{mnh'} (g)^{h'}_{l'} \quad (\text{VII.3})$$

On peut transformer (VII.3) en utilisant la définition de $\det g$, où g est la matrice $(g_i{}^j)$:

$$\det g^{-1} \varepsilon^{mnl} = \varepsilon^{ijk} (g^{-1})_i{}^m (g^{-1})_j{}^n (g^{-1})_k{}^l$$

* Topologie induite sur L_3 par la topologie naturelle de $\mathbb{R}^9$.

on obtient :

$$\rho^{lk} = \det g^{-1} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^{mnp} \varepsilon_{mnk'} g_p^k \rho^{l'k'} g_{l'}^1$$

où :

$$\rho^{lk} = \det g^{-1} g_{l'}^1 \rho^{l'k'} g_k^k$$

Appelons R la matrice ρ^{ij} , on obtient finalement :

$$\boxed{R' = (\det g)^{-1} g R g^t} \quad (\text{VII.4})$$

Nous devons ensuite exprimer que R correspond à une algèbre de Lie, c'est-à-dire que les équations de Jacobi sont vérifiées. Décomposons R en $R = S + A$ où S est symétrique et A antisymétrique.

$$\rho^{ij} = \sigma^{ij} + \varepsilon^{ijk} \hat{\alpha}_k \quad (\text{VII.5})$$

σ^{ij} est l'élément (ij) de S, et $\varepsilon^{ijk} \hat{\alpha}_k$ est l'élément (ij) de A. Alors les équations de Jacobi s'écrivent :

$$\sum_{n,l} \rho^{an} \rho^{lm} \varepsilon_{nlm} = 0$$

et en utilisant (VII.5) on obtient l'expression suivante des équations de Jacobi.

$$\boxed{\rho^{ab} \hat{\alpha}_b = 0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\sigma^{ab} \hat{\alpha}_b = 0} \quad (\text{VII.6})$$

Le vecteur $\hat{\alpha}_k$ doit être vecteur propre de S pour la valeur propre 0.

L'équation (VII.4) préserve le rang de la matrice R : les algèbres isomorphes correspondent donc à des matrices de même rang, rang qui correspond également à la dimension de l'algèbre dérivée

$\mathcal{D}^1_\mu = [\mu, \mu]$. On peut donc entreprendre une classification des algèbres de Lie suivant la dimension de l'algèbre dérivée.

a) $\dim \mathcal{D}^1_\mu = 3$

Le rang de R est 3, donc $\det R \neq 0$. Le noyau de R est donc nul ce qui signifie que le vecteur $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_a)$ est nul (cf VII.6), et que la matrice R est symétrique.

Dans Jacobson, on trouve que la condition d'équivalence (VII.4) peut être affaiblie en :

$$R' = \rho g R g^t \quad (\text{VII.7})$$

où ρ est un nombre réel quelconque. ((VII.7) et (VII.4) sont équivalents).

Utilisons alors la décomposition $g = S \cdot 0$ où 0 est orthogonale et S symétrique : on peut toujours diagonaliser R au moyen d'une transformation orthogonale 0 et d'après (VII.7) on peut fixer une valeur propre égale à 1. On voit facilement que l'action de S ne peut pas changer le signe des autres valeurs propres. On obtient ainsi deux orbites, que l'on appelle A_8 et A_9 et dont des éléments représentatifs sont respectivement :

$$A_8 : R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad A_9 : R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

En revenant aux constantes de structures, ces algèbres sont :

$$A_9 : [e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_2, e_3] = e_1$$

$$[e_3, e_1] = e_2$$

$$A_8 : [e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_2, e_3] = e_1$$

$$[e_3, e_1] = -e_2$$

Ce sont donc les algèbres de Lie simples de dimension 3. A_9 est l'algèbre du groupe des rotations de dimension 3, et A_8 est l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$.

La dimension des orbites est 6 (dimension de l'espace des matrices 3 x 3 symétriques).

b) $\dim \mathcal{D}_\mu^1 = 2$

Par une transformation orthogonale, toute matrice de rang 2 peut être ramenée à la forme suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quand σ_1 et σ_2 sont $\neq 0$, la condition (VII.6) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Sous l'action d'une matrice symétrique qui peut être choisie diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La matrice R est transformée en :

$$R' = \begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_1^2 & \alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ -\alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 & \sigma_2 \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que la quantité $\sigma_1 \sigma_2 / \alpha_3^2$ est un invariant λ , qui peut être utilisé pour classer les orbites.

On obtient finalement les orbites suivantes décrites par un élément représentatif:

$$A_7 : R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = e_1 \\ [e_3, e_1] = e_2 \end{cases}$$

A_7 est l'algèbre du groupe euclidien du plan.

$$A_6 : R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = +e_1 \\ [e_3, e_1] = -e_2 \end{cases}$$

$A_5(\lambda) : \lambda \neq -1$: famille continue d'orbites inéquivalents caractérisés

par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$A_5(\lambda) : \begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = e_1 - e_2 \\ [e_3, e_1] = e_1 + \lambda e_2 \end{cases}$$

le cas $\lambda = -1$ correspond à une chute du rang de R.

Quand $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ on a :

$$A_4 : R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$A_4 \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = -e_2 \\ [e_3, e_1] = e_1 \end{array} \right.$$

Les dimensions de ces orbites peuvent être calculées directement, en déterminant le stabilisateur de l'élément représentatif R.

On trouve ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} \dim O(A_7) , O(A_6) , O(A_5(\lambda)) \\ \dim O(A_4) \end{array} \right. = \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array}$$

$O(A_4)$ se trouve directement: dimension des matrices antisymétriques 3 x 3.

c) $\dim \mathcal{D}^1_\mu = 1$

Il y a seulement deux sortes d'orbites :

A_3 dont un représentant est $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est l'élément de la famille $A_5(\lambda)$ pour $\lambda = -1$.

et A_2 correspondant à $R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{soit } : \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_2] = 0 = [e_3, e_1] \\ [e_2, e_3] = e_1 \end{array} \right.$$

seule algèbre nilpotente de dimension 3.

Les dimensions des orbites sont :

$$\left| \begin{array}{l} \dim 0(A_3) = 5 \\ \dim 0(A_2) = 3 \end{array} \right.$$

d) $\dim \mathcal{D}^1_\mu = 0$

c'est l'algèbre abélienne A_1 réduite à un point sur L_3 (dimension $0(A_1) = 0$).

Classification des orbites sur $\mathbb{C}$: On voit facilement que sur C , A_8 et A_9 appartiennent à la même orbite, ainsi que A_7 et A_6 d'une part, $A_5(\lambda)$ et $A_5(-\lambda)$ d'autre part. Les dimensions des orbites sur C ont les mêmes valeurs respectivement.

Description des composantes de la variété [cf. I, §2] Le cône U_3 des algèbres unimodulaires :

Rappelons que U_3 est défini par la condition $\text{Tr } a e_i = 0$ $\forall i = 1, 2, 3$. Soit

$$\sum_i c_{ji}^i = 0 \quad \forall j \quad \text{ou} \quad \sum_{ik} \varepsilon_{jik} \rho^{ik} = 0.$$

Les algèbres unimodulaires correspondent à des matrices R symétriques ce sont (outre A_1) : A_2 , A_6 , A_7 , A_8 , et A_9 .

Il en résulte ainsi que la dimension maximum de U_3 est 6. (dimension de l'espace des matrices symétriques). L'étude des déformations qui suit nous montrera qu'il est en fait formé de l'adhérence des orbites de A_8 et de A_9 .

L'ensemble R_3 des algèbres de Lie résolubles est formé de toutes les algèbres de Lie non semi-simples : toutes ces algèbres sont le produit semi-direct d'une algèbre de dimension 1 et d'une algèbre commutative de dimension 2 : la dimension de R_3 est 6 (dimension de $0(A_5(\lambda))$ + une dimension due au paramètre). L'étude des déformations montre que cette composante R_3 est l'adhérence de la famille $A_5(\lambda)$. Sur $\mathbb{R}$ il est possible qu'elle soit formée de deux composantes connexes, sur $\mathbb{C}$ on peut affirmer qu'elle est irréductible et connexe.

Sur $\mathbb{C}$ [Ra] on voit que $L_3 = R_3 \cup U_3$ où R_3 et U_3 sont de dimension 6.

2. Définitions des algèbres de Lie régulières et singulières :

Ces définitions sont différentes de celles rencontrées lors de la contraction : contractions régulières et singulières. Nous voulons seulement ici souligner une certaine analogie entre la classification des orbites et la classification des singularités d'une application d'espaces euclidien [Wh 1.2].

Nous avons déjà vu que la dimension de $Z^2(\mu, \mu)$ est lié au rang de la matrice $\frac{\partial P_1}{\partial x_i}$ du point où P_1 sont les polynômes de Jacobi et (x_i) les constantes de structure : $i = 1, 2 \dots \frac{n^2(n-1)}{2}$. Une autre façon de formuler ce résultat est obtenue en considérant l'application f de $L^2(V, V) \rightarrow L^3(V, V)$ (espaces des applications antisymétriques de $V \wedge V$ dans V , et de $\wedge^3 V$ dans V) définie par [Ri 2] :

$$\mu \in L^2(V, V) \rightarrow f(\mu) = \mu \wedge \mu \in L^3(V, V) \quad \text{VII.8}$$

avec

$$(\mu \wedge \mu)(x, y, z) = \sum_{\rho(x, y, z)} \mu(\mu(x, y), z)$$

μ est une algèbre de Lie si elle est dans la noyau de f . L'application différentielle df applique $L^2(V, V)$ dans l'espace $L(L^2(V, V), L^3(V, V))$

et μ est une algèbre de Lie, on a :

$$df(\mu) \cdot \varphi = -\delta^\mu \varphi \quad \forall \varphi \in L^2(V, V)$$

$\delta^\mu \varphi(x, y)$ signifie que la loi d'algèbre de Lie considérée pour définir le cobord est celle de μ .

On voit donc que la dimension de $Z^2(\mu, \mu)$ est liée à l'application $df(\mu)$. Plus précisément, si ρ est le rang de l'application $df(\mu)$, alors :

$$\dim Z^2(\mu, \mu) = \frac{n^2(n-1)}{2} - \rho \quad (\text{VII.9})$$

Par analogie avec les applications différentiables de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on peut appeler "algèbres de Lie régulières" les algèbres μ pour lesquelles l'application $df(\mu)$ est de rang maximum, et "singulières" les autres.

Dans notre cas, les points réguliers sont ceux qui correspondent à $\rho = 3$, soit $\dim Z^2(\mu, \mu) = 6$. Les points singuliers peuvent être groupés en différentes "classes" suivant la dimension de ρ . (Mais on ne peut pas affirmer que ces classes sont des sous-variétés, car il faudrait que l'application F soit "localement générique" [Whitney [Wh.2]]).

Pour la dimension 3, les différentes "classes" de points singuliers correspondent exactement à la classification suivant les orbites (mais sur $\mathbb{C}$). (Il est vraisemblable qu'en dimension supérieure il est nécessaire d'introduire des ensembles de points singuliers plus "fins", analogues à ceux donnés dans la théorie de Whitney, pour retrouver l'ensemble des orbites).

A l'intérieur de chaque composante irréductible, la situation des différentes orbites présente beaucoup d'analogie avec la structure obtenue dans l'étude (et la classification) des points

singuliers d'une application différentiable d'après Whitney. On trouve en effet une succession d'orbites : dans le bord de chaque orbite, une orbite de dimension inférieure, comme va nous le montrer l'étude des déformations qui suit, l'ensemble formant une sorte de "collection de variétés" (mais pas exactement à cause de la présence de la famille continue d'orbites).

3. Déformations : Au chapitre II, nous avons vu que le plan tangent en μ à l'orbite de μ s'identifie à $B^2(\mu, \mu)$, et que la variété linéaire tangente attachée aux équations de Jacobi au point μ s'identifie à $Z^2(\mu, \mu)$. Sauf dans certains cas (point simple tel que $H^3(\mu, \mu) = 0$ par exemple) on ne peut rien dire des rapports entre $Z^2(\mu, \mu)$ et le plan tangent (ou cône des tangentes) géométrique en μ décrit par l'ensemble $Z^{2 \text{ int}}(\mu, \mu)$ contenu dans $Z^2(\mu, \mu)$. C'est ce que nous allons examiner dans la suite, nous obtiendrons ainsi une description des différents espaces tangents à la variété L_3 .

Un calcul direct donne les résultats indiqués dans le tableau suivant:

μ	dim $B^2(\mu, \mu)$	dim $Z^2(\mu, \mu)$
A_1	0	9
A_2	3	8
A_3	5	6
A_4	3	6
$A_5(\lambda)$	5	6
$\lambda \neq -1$		
A_6	5	7
A_7	5	7
A_8	6	6
A_9	6	6

Tableau I

a) Déformation des algèbres de Lie "régulières", c'est-à-dire telles que $\dim Z^2(\mu, \mu) = 6$.

Ce sont A_8 , A_9 , A_4 et $A_5(\lambda)$.

Nous savons déjà que A_8 et A_9 , semi-simples, sont rigides, c'est-à-dire que toutes leurs déformations sont triviales.

Les algèbres A_4 et $A_5(\lambda)$ ne sont pas unimodulaires, elles appartiennent donc uniquement à la composante R_3 de la variété L_3 et on peut s'attendre à ce que leurs déformations soient contenues dans R_3 , c'est-à-dire comme les algèbres déformées ont forcément une algèbre dérivée de dimension supérieure ou égale à l'algèbre initiale (cf. VI, §5) on ne doit pas trouver d'autres déformations que A_4 ou $A_5(\lambda)$. En effet on a le résultat suivant :

toutes les déformations non-triviales d'une algèbre de la forme A_4 ou $A_5(\lambda)$ traversent l'ensemble des orbites $A_5(\lambda)$. C'est le cas par exemple de la déformation au premier ordre suivante pour $A_5(\lambda)$:

$$A^t : \begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = e_1 - e_2 \\ [e_3, e_1] = e_1 + \lambda e_2 + t e_2 \end{cases}$$

Pour chaque valeur de t , on a une algèbre qui appartient à une orbite différente : $A_5(\lambda + t)$. (De façon directe, on peut voir qu'il n'y a pas de déformation dans A_8 ou A_9 , car il est impossible de déformer une matrice anti-symétrique dans une matrice symétrique).

b) Déformations des algèbres de Lie "singulières" :

Nous appelons ainsi les algèbres A_1 , A_2 , A_6 et A_7 correspondant à une dimension de $Z^2(A, A)$ respectivement de 9, 8 et 7. (Nous ne considérerons pas le cas de l'algèbre de Lie abélienne A_1 qui admet une déformation dans toutes les orbites).

Pour étudier A_2 , A_6 et A_7 nous utiliserons les notations suivantes : à l'élément $\mu_1(x,y)$ caractérisant le vecteur tangent à la déformation, nous associons une matrice R_1 de la même façon qu'au paragraphe 1.

$$R_1 = \begin{pmatrix} y & q & u \\ s & z & r \\ v & w & x \end{pmatrix} \quad (\text{VII.10})$$

L'algèbre déformée correspond dans cette transformation à la matrice :

$$R_t = R + t R_1 + \dots$$

R étant la matrice (ρ^{lk}) associée à l'algèbre non déformée.

(1) Déformations de A_6 et A_7

Elles se traitent de la même façon. Considérons le cas de A_6 . Nous prenons comme matrice R (cf.1) :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

En écrivant que l'élément μ_1 est un cocycle : $\mu_1 \in Z^2(A_6, A_6)$ on trouve les conditions suivantes sur R_1 :

$$\begin{cases} r &= w \\ u &= v \end{cases} \quad (\text{VII.11})$$

Les cobords sont définis en plus par :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ q &= s \end{cases} \quad (\text{VII.12})$$

La condition d'intégrabilité au 1er ordre (II,10) est simplement :

$$x(q - s) = 0 \quad (\text{VII.13})$$

Cette équation définit une variété $Z^{2 \text{ int}}(A_6, A_6)$ qui est faite de l'union de deux composantes :

$$\begin{aligned} C_1 & : q = s \\ C_2 & : x = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.14})$$

de dimension maximum 6 par conséquent.

Examinons les déformations linéaires en t :

$$R_t = R_0 + t R_1$$

On a alors d'autres conditions sur R_1 pour que R_t soit une algèbre de Lie. Ce sont :

$$\begin{aligned} C' & : v(q - s) = 0 \\ C'' & : w(q - s) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

1er cas : $\mu_1 \in C_1$: C' et C'' sont satisfaites. La matrice R_t est symétrique de déterminant non nul si $x \neq 0$. Il ne peut y avoir qu'une déformation dans A_8 .

Pour A_7 , deux possibilités existent : une déformation dans A_8 pour $x < 0$ et dans A_9 pour $x > 0$.

2ème cas : $\mu_1 \in C_2$: En général, on doit avoir $q \neq s$. Par conséquent d'après C' et C'' : $v = w = 0$.

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 + yt & tq & 0 \\ ts & -1 + ts & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_t est une déformation qui traverse la famille $A_5(\lambda)$.

Pour $\mu_1 \in C_1 \cap C_2$ les déformations linéaires sont triviales.

Dans le cas déformations générales d'ordre supérieur, les conditions d'intégrabilité ne sont plus C' et C'' , mais on a cependant les résultats suivants :

$\mu_1 \in C_1$: déformation dans A_8 ou A_9 . (Cela vient de la rigidité de ces algèbres : si au premier ordre, on se dirige dans l'une des orbites $0(A_8)$ ou $0(A_9)$, la rigidité implique que la déformation reste toujours dans l'orbite).

$\mu_1 \in C_2$: déformation transverse à la famille $A_5(\lambda)$, elle peut soit traverser toutes les orbites $A_5(\lambda)$, soit rester à l'intérieur d'une orbite déterminée $A_5(\lambda)$.

$\mu_1 \in C_1 \cap C_2$: tous les cas sont possibles. La déformation part dans une direction tangente à l'orbite, et l'étude doit se faire en "chassant le cobord μ_1 " d'après le nouveau vecteur tangent μ'_1 obtenu de cette façon (IV, prop).

Finalement, nous voyons que la structure infinitésimale de la variété L_3 au voisinage de A_6 est bien décrite par la variété $Z^{2 \text{ int}}(A_6, A_6)$ celle-ci se décompose en deux espaces vectoriels de dimension 6, qui décrivent respectivement les plans tangents à l'orbite de A_8 d'une part (C_1 : $r = w, u = v, q = s$) et à la composante R_3 (C_2 : $r = w, u = v, x = 0$) d'autre part. L'intersection $C_1 \cap C_2$ est l'espace $B^2(A_6, A_6)$, par conséquent un élément R_1 appartenant à cette intersection conduit à une déformation infinitésimale triviale et peut toujours être "chassé" soit dans une composante, soit dans l'autre. Ici la structure de $H^{2 \text{ int}}(A_6, A_6)$ est très simple : il est formé de deux morceaux de dimension 1, caractérisant chacun une direction de déformation non triviale bien déterminée.

(2) Déformations de A_2

Partons de l'algèbre suivante :

$$A_2 = \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_2, e_3] = 0 \\ [e_3, e_1] = 0 \end{cases} \quad \text{Soit } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul direct donne pour les espaces de cocycles et de cobords :

$$\begin{cases} Z^2(A_2, A_2) : s = q \\ B^2(A_2, A_2) : s = q = 0 \quad y = z = 0 \quad u = v \quad w = r \end{cases} \quad (\text{VII.16})$$

Les conditions d'intégrabilité au premier ordre (II,10) sont :

$$\begin{cases} s(u - v) + y(w - r) = 0 \\ z(u - v) + s(w - r) = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.17})$$

$$-vr + wu = a \quad (\text{VII.17'})$$

où a est une constante arbitraire dépendant du deuxième terme μ_2 .
Si $\mu_2 = 0$ (déformation au premier ordre) $a = 0$.

Les déformations linéaires (du premier ordre) : La variété $Z^2 \text{ int}(A_2, A_2)$ est définie par les équations (VII.17) et (VII.17') (avec $a = 0$). Nous distinguons les deux sous-variétés suivantes (d'après l'équation (VII.17) seule afin de pouvoir traiter le cas des déformations les plus générales). :

$$\begin{aligned} V_1 \quad \Delta &= s^2 - yz \neq 0 \quad \text{soit } u = v, w = r \\ V_2 \quad \Delta &= s^2 - yz = 0 \quad (\text{et en général } u \neq v, w \neq r) \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

On vérifie facilement que ces sous-variétés sont invariantes sous l'action du stabilisateur de A_2 .

1er cas : Le vecteur tangent $\mu_1 \in V_1$. La matrice R_t est symétrique, et de déterminant non nul dans un voisinage de $t = 0$. (car le terme d'ordre le plus bas est Δ). Pour $t > 0$, on a une déformation dans A_8 si $\Delta > 0$ et A_9 si $\Delta < 0$.

Exemple de déformation dans A_9 :

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_2, e_3] = t e_1 \\ [e_3, e_1] = t e_2 \end{cases}$$

2ème cas : $\mu_1 \in V_2$. L'équation (VII.17') n'est plus triviale. On peut voir que la matrice R_t obtenue dans ce cas a un déterminant nul. De plus, c'est une matrice non symétrique car $u \neq v$ et $r \neq w$. C'est donc une déformation dans $A_5(\lambda)$ et elle traverse nécessairement toute la famille. Par exemple :

$$A_t \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 + t e_1 \\ [e_2, e_3] = -t e_3 + K t e_1 \\ [e_1, e_3] = 0 \end{cases}$$

Pour chaque valeur de t , A_t appartient à $A_5(K/t)$.

3ème cas : $\mu_1 \in V_1 \cap V_2$ ($\Delta = 0$, $u = v$, $w = r$) R_t est symétrique, son déterminant est nul : il peut y avoir déformation dans A_3 ou A_7 .
Exemple :

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_2, e_3] = t e_1 \\ [e_1, e_3] = 0 \end{cases}$$

Les déformations générales :

$\mu_1 \in V_1$: de la même façon que pour A_6 ou A_7 , il résulte de la rigidité des algèbres de Lie semi-simples que la déformation ne peut avoir lieu que dans A_8 ou A_9 .

$\mu_1 \in V_2$: la déformation traverse toujours la famille $A_5(\lambda)$, mais elle peut rester dans une orbite bien déterminée contrairement à la situation au premier ordre. Par exemple :

$$A_t \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 + t e_1 \\ [e_2, e_3] = -t e_3 + K t^2 e_1 \\ [e_1, e_3] = 0 \end{cases}$$

A_t reste dans l'orbite de $A_5(K)$.

$\mu_1 \in V_1 \cap V_2$: tous les cas sont possibles.

Conclusion : l'étude de la variété $Z^{2 \text{ int}}(\mu, \mu)$ correspondant aux déformations au premier ordre seulement, permet une certaine classification des déformations en familles bien déterminées. Les déformations aux ordres suivants peuvent seulement préciser une direction à l'intérieur de ces familles. Ainsi par exemple dans le cas de l'algèbre A_2 , située à l'intersection des deux composantes A_3 et U_3 de la variété, la structure de $Z^{2 \text{ int}}(\mu, \mu)$ reflète la possibilité de partir soit dans une composante, soit dans l'autre. La déformation peut ensuite se préciser soit dans R_3 , soit dans U_3 .

Remarque : On obtient facilement les résultats correspondants dans le cas d'algèbres sur $\mathbb{C}$: alors A_9 et A_8 appartiennent à une même orbite, ainsi que A_6 et A_7 , ou $A_5(\lambda)$ et $A_5(-\lambda)$, $\lambda \neq 1$. La dimension sur $\mathbb{C}$ des groupes de cohomologie est la même respectivement et l'étude des déformations s'obtient immédiatement à partir de l'étude précédente.

VIII - QUELQUES PROPRIETES DES PRODUITS SEMI-DIRECTS

Nous avons déjà vu que les algèbres de Lie semi-simples, ainsi que les algèbres de Lie dont le radical R est de dimension 1 (produit direct d'une algèbre semi-simple par R) sont rigides (puisqu'elles vérifient la condition $H^2(\mu, \mu) = 0$). Ce sont également des points, simples de la variété L_n . Enfin on peut calculer facilement la dimension de leur orbite qui est donnée par $n^2 - n$. (Pour les algèbres de la forme $\mu = S \times R$, avec $\dim R = 1$, S semi-simple, on a : $\dim H^0(\mu, \mu) = \dim \text{centre}(\mu) = 1$, et $\dim H^1(\mu, \mu) = 1$ (l'élément $\varphi(r) = \lambda r$ est une dérivation qui n'est pas intérieure), d'où $\dim O(\mu) = n^2 - n + \dim H^0(\mu, \mu) - \dim H^1(\mu, \mu) = n^2 - n$.)

Les algèbres de Lie les plus naturelles à étudier après celles-ci sont les produits semi-directs $S \times R$, où de plus la radical R est un S -module simple. (C'est-à-dire que la représentation adjointe de S dans R est irréductible.) Cette classe d'algèbres se prête par ailleurs à des applications physiques, puisqu'elles contiennent en particulier le groupe de Poincaré.

Dimension des orbites

Soit $\mu = S \times R$ le produit semi-direct d'une algèbre de Lie semi-simple S et d'une algèbre de Lie résoluble R , tel que la représentation de S dans R servant à définir le produit semi-direct soit irréductible.

De cette hypothèse résulte que R est commutative. Si en plus on suppose $\dim R > 1$, le centralisateur de S est nul. En effet, l'algèbre dérivée de R , soit $\mathfrak{D}^1(R) = 0$ ou R , R étant résoluble, on ne peut avoir que $\mathfrak{D}^1(R) = 0$.

De même, le centralisateur de S , c'est-à-dire l'ensemble $\mathfrak{C}(S) = \{X, [X, Y] = 0 \forall Y \in S\}$, est invariant par $\text{ad } S$ et inclu dans R ,

parce que S semi-simple n'a pas de centre. Donc :

- ou bien $\mathfrak{G}(S) = R$, ce qui signifie que l'algèbre μ est le produit direct de S et de R (et dans ce cas, l'irréductibilité implique que $\dim R = 1$) ;
- ou bien $\mathfrak{G}(S) = 0$. $[Ra]$.

Supposons $\dim R > 1$. Il est facile de calculer directement $H^1(\mu, \mu)$ en appliquant le théorème de Serre-Hochschild $[H. S.]$. On a l'identité suivante :

$$H^1(\mu, \mu) = H^1(R, \mu)^S$$

ce qui signifie qu'il suffit de calculer les dérivations de μ nulles sur S et invariantes par $\text{ad } S$. (La nullité sur S s'appelle aussi le lemme de Whitehead : $\forall$ une dérivation A de μ , $\exists$ $l \in S$ telle que $(A - \text{ad } l)(X) = 0 \ \forall X \in S$.)

En général, $D = D_R + D_S$, où D est une application à valeurs dans R et D_S à valeurs dans S . En tenant compte de la nullité de D sur S , ces applications vérifient :

$$D_R[X, Y] = [X, D_R(Y)] \quad (\text{VIII.1})$$

$$\forall X \in S, \forall Y \in R$$

$$D_S[X, Y] = [X, D_S(Y)] \quad (\text{VIII.2})$$

R étant commutative, la condition de dérivation pour D sur $R \times R$ se réduit à :

$$[D_S(Y_1), Y_2] + [Y_1, D_S(Y_2)] = 0 \quad \forall Y_1, Y_2 \in R \quad (\text{VIII.3})$$

et par conséquent, dans ce cas, D_S et D_R sont encore des dérivations de μ .

D_R commute avec $\text{ad } X$, $\forall X \in S$, car

$$[D_R, \text{ad } X] = \text{ad}(D_R X) = 0$$

car D_R (et D_S) sont nulles sur S . L'irréductibilité de $\text{ad } S$ entraîne alors que D_R est un multiple de l'identité sur R .

$$D_R(Y) = \lambda Y, \quad \forall Y \in R \quad . \quad (\text{VIII.4})$$

Remarquons que D_R ne peut pas être une dérivation intérieure, car cela impliquerait l'existence d'un élément Z tel que $\text{ad } Z(S) = 0$; or le centralisateur de S est nul.

Pour la partie D_S , on peut établir le fait général suivant :

$$H^1(R, \mu)^S \subset L(R, \mu)^S = L(R, R+S)^S, \quad (\text{VIII.5})$$

ce qui signifie que l'on doit extraire la partie "scalaire" représentation identité de $R^* \otimes (R+S)$ par rapport à $\text{ad } S$. La représentation D_S n'est donc différente de 0 que si $R^* \otimes S \supset$ représentation identité, c'est-à-dire si S contient au moins une fois une représentation équivalente à R . On a donc le premier résultat :

Proposition 1 : Soit $\mu = S \times R$ le produit semi-direct d'une algèbre de Lie semi-simple S par une algèbre résoluble R de dimension supérieure à 1, et telle que la représentation de S dans R soit irréductible (sur $\mathbb{C}$). Si, en tant que S -module pour la représentation adjointe de S , S ne contient pas de représentation équivalente à R , alors $\dim H^1(\mu, \mu) = 1$, un représentant étant fourni par l'application nulle sur S , et égale à l'identité sur R .

(Ce résultat est également dans R. Hermann [H2], avec en plus l'hypothèse de commutativité pour R).

Examinons le cas où S contient une seule fois une représentation équivalente à R . Cela signifie en particulier qu'il existe un ensemble d'éléments $X_i \in S$ tels que :

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= c_{ij}^k X_k \\ [X_i, Y_j] &= c_{ij}^k Y_k \end{aligned} \quad X_i \in S, Y_i \in R$$

D'après (VIII.5), la seule dérivation D_S possible est proportionnelle à :

$$D_S(Y_i) = X_i \quad X_i \in S, Y_i \in R$$

Mais la condition de cocycle sur R (la condition de dérivation) qui est :

$$[D_S(Y_i), Y_j] = [D_S(Y_j), Y_i]$$

ne peut manifestement pas être satisfaite (car $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$). On a donc le même résultat que précédemment :

Proposition 2 : sous les mêmes hypothèses générales, si S contient une fois au plus une représentation équivalente à R, on a :

$$\dim H^1(\mu, \mu) = 1 \text{ (avec le même représentant).}$$

Conséquence sur la dimension des orbites

Les algèbres du type précédent $\mu = R \times S$, où R est un S-module simple*, et telles que la représentation de S dans R contienne une représentation équivalente à R une fois au plus, ont une orbite de dimension $n^2 - n - 1$. En effet, on a vu que :

$$\dim O(\mu) = n^2 - n + \dim H^0(\mu, \mu) - \dim H^1(\mu, \mu)$$

Or $H^0(\mu, \mu)$ est le centre de μ , nul d'après l'hypothèse d'irréductibilité faite sur R, et $\dim H^1(\mu, \mu) = 1$.

Quelques cas particuliers ne rentrant pas dans la catégorie précédente sont facilement calculables.

1. Si R est de dimension 1 :

$$\mu = R \otimes S \text{ produit direct. On a : } \dim H^0(\mu, \mu) = 1 = \dim H^1(\mu, \mu),$$

$$\text{d'où } \underline{\dim O(\mu) = n^2 - n}$$

2. Si R est de dimension 2, et la représentation adjointe de S nulle sur R :

$$\mu = R \otimes S \text{ produit direct. } H^1(\mu, \mu) = H^1(R, R).$$

a) R non commutative : choisissons une base telle que $[X_1, X_2] = X_1$, tout élément de $Z^1(R, R)$ est de la forme :

* $\dim R > 1$.

$$\varphi(X_1) = \alpha X_1, \quad \varphi(X_2) = \alpha' X_2$$

et un représentant du groupe H^1 est fourni par :

$$\psi = \varphi + \alpha \operatorname{ad} X_2, \quad \psi(X_1) = 0, \quad \psi(X_2) = \alpha' X_2$$

donc

$$\dim H^1(\mu, \mu) = 1 \text{ et } \underline{\dim O(\mu) = n^2 - n - 1}$$

- b) R commutative : $H^0(\mu, \mu)$ est de dimension 2 (car c'est R) et $H^1(R, R) = C^1(R, R)$ est de dimension 4. D'où

$$\underline{\dim O(\mu) = n^2 - n - 2} \quad .$$

Il est facile de voir que les algèbres du type (b) se déforment dans des algèbres du type (a).

Il est plus difficile d'obtenir des résultats généraux sur le groupe $H^2(\mu, \mu)$ sans introduire de nombreuses hypothèses supplémentaires qui reviennent finalement à l'étude des cas particuliers de la section IX. Signalons cependant un résultat obtenu par R. W. Richardson, tout à fait indépendamment de tout calcul de cohomologie, concernant la déformation des produits semi-directs $S + R$, où R est un S -module simple. Ce résultat systématise ceux que nous obtiendrons, en particulier dans les cas de l'algèbre de Poincaré et de l'Euclidien.

Théorème [Ri1] : soit $L = S + R$ où S est semi-simple et R un S -module simple abélien. Alors L n'est pas rigide si et seulement s'il existe une algèbre de Lie semi-simple L' qui satisfait les conditions suivantes :

- a) il existe une sous-algèbre semi-simple S' de L' qui est isomorphe à S ;
- b) si on identifie S et S' par un isomorphisme, alors L'/S' est isomorphe à R en tant que S -module.

Ce théorème démontre également sur les seules déformations possibles d'algèbres du type L sont dans des algèbres de Lie semi-simples.

IX - APPLICATION AUX GROUPES (PSEUDO) ORTHOGONAUX INHOMOGENES

Le groupe pseudo-orthogonal inhomogène $IO(p,q)$ $p + q = n$ est le produit semi-direct de $O(p,q)$ et des translations dans un espace pseudo-euclidien. Une base de l'algèbre de Lie (qui est réelle) s'écrit en fonction de générateurs $M_{\mu\nu}$ antisymétriques :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} M_{\rho\mu}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = g_{\mu\rho} P_{\nu} - g_{\nu\rho} P_{\mu} \quad (IX.1)$$

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad \mu, \nu = 1, \dots, n$$

avec $g_{11} = \dots = g_{pp} = -g_{p+1,p+1} = \dots = -g_{nn} = 1$.

Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 1 : Les algèbres $IO(p,q)$ sont des points simples de la variété des algèbres de Lie de dimension $n(n+1)/2$. Elles n'admettent que deux sortes de déformations allant dans l'orbite des algèbres semi-simples $O(p+1,q)$ et $O(p,q+1)$. Enfin la dimension de l'orbite de

$IO(p,q)$ est $(\frac{n(n+1)}{2})^2 - \frac{n(n+1)}{2} - 1$, c'est-à-dire qu'elle est de codi-

mension 1 dans la composante irréductible de $L_{\frac{n(n+1)}{2}}$ à laquelle l'algèbre $IO(p,q)$ appartient.

Le résultat sur la dimension de l'orbite vient des propositions 1 et 2 de la partie VII (2 s'applique au cas $n = 3$ de l'Euclidien, 1 s'applique dans tous les autres cas). En effet, on a :

$\dim H^1(\mu, \mu) = 1$ pour ces algèbres, et comme elles n'ont pas de centre :

$$\dim O(\mu) = N^2 - N - 1 \quad \text{où } N = \dim V = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Pour démontrer la proposition 1, nous devons calculer les groupes $H^2(\mu, \mu)$ et $H^3(\mu, \mu)$. Pour cela, nous utiliserons le théorème de Serre et Hochschild [H-S] :

$$H^n(\mu, M) = \sum_{i+j=n} H^i(\mu/T, k) \otimes H^j(T, M)^\mu \quad (\text{IX.2})$$

où M est un μ -module de dimension finie, T un idéal de μ tel que μ/T soit semi-simple et k le corps de définition de μ .

1) Calcul de $H^2(\mu, \mu)$

Prenons pour T l'idéal formé par les translations (P_μ) . Le théorème précédent se réduit à :

$$H^2(\mu, \mu) = H^2(T, \mu)^\mu \quad (\text{IX.3})$$

(en utilisant le fait que $H^2(L, k) = H^1(L, k) = 0$ si L est semi-simple [S.L]). Le problème est donc ramené à l'étude de $H^2(T, \mu)^\mu$.

a) Les cobords $B^2(T, \mu)$

Soit ϕ un élément de $B^2(T, \mu)$: ϕ est une application bilinéaire de $T \wedge T \rightarrow \mu$, pour laquelle il existe une 1-cochaine $\Phi : T \rightarrow \mu$ telle que :

$$\phi(P_\mu, P_\nu) = \delta \Phi(P_\mu, P_\nu) = [P_\mu, \Phi(P_\nu)] - [P_\nu, \Phi(P_\mu)] \quad P_\nu, P_\mu \in T \quad (\text{IX.4})$$

Posons $L = \mu/T$, $L \simeq 0(p, q)$. D'après (IX.4), Φ peut être pris à valeurs dans L , soit :

$$\Phi(P_\mu) = \sum_{\nu \rho} d_\mu^{\nu \rho} M_{\nu \rho} \quad (\text{IX.5})$$

Décomposons l'application ϕ en $\phi = \phi_L + \phi_T$ où

$$\phi_L(P_\mu, P_\nu) = \phi(P_\mu, P_\nu)/L$$

$$\phi_T(P_\mu, P_\nu) = \phi(P_\mu, P_\nu)/T$$

D'après (IX.4), $\delta\Phi(P_\mu, P_\nu) \in T$, et par conséquent la composante φ_L est nulle.

Un cobord $B^2(T, \mu)$ est donc une application de $\varphi_T : T \wedge T \rightarrow T$:

$$\varphi_T(P_\mu, P_\nu) = \sum_{\rho=1}^{\rho} \alpha_{\mu\nu}^{\rho} P_{\rho} \quad . \quad (IX.6)$$

La condition (IX.4) s'écrit en termes des composantes :

$$\alpha_{\mu\nu}^{\rho} = 2 (d_{\nu}^{\rho\mu} g_{\mu\mu} - d_{\mu}^{\rho\nu} g_{\nu\nu}) \quad , \quad (IX.7)$$

le choix des $(d_{\mu}^{\rho\lambda})$ étant arbitraire.

Or, étant donné des constantes $\alpha_{\mu\nu}^{\rho} = -\alpha_{\nu\mu}^{\rho}$, il est toujours possible de trouver un système de $(d_{\mu}^{\rho\lambda})$ tel que (IX.7) soit satisfait, autrement dit pour toute fonction φ de $T \wedge T \rightarrow T$, il est possible de trouver une fonction ϕ telle que l'on ait (IX.4). En fait, cette fonction ϕ est uniquement déterminée par :

$$d_{\rho}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\alpha_{\nu\mu}^{\rho} g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} g_{\rho\rho} + \alpha_{\nu\rho}^{\mu} g^{\nu\nu} + \alpha_{\rho\mu}^{\nu} g^{\mu\mu}) \quad . \quad (IX.8)$$

On a donc le résultat :

$$\underline{B^2(T, \mu) = C^2(T, T)}$$

où $C^2(T, T)$ est l'espace de toutes les applications bilinéaires de $T \wedge T \rightarrow T$.

b) Les cocycles $Z^2(T, \mu)$

$$f \in Z^2(T, \mu) \text{ si : } \delta f(P_\mu, P_\nu, P_\rho) = \sum_{\rho(\mu, \nu, \rho)} [P_\mu, f(P_\nu, P_\rho)] = 0 \quad . \quad (IX.9)$$

En utilisant la décomposition $f = f_T + f_L$ suivant que f prend ses valeurs dans T ou dans L , on voit que la condition (IX.9) porte seulement sur la partie f_L .

Rappelons la définition de $H^2(T, \mu)^\mu$: on a une structure canonique de T-module sur $C^2(T, \mu)$ définie par :

$$f \in C^2(T, \mu) \rightsquigarrow X.f \in C^2(T, \mu), X \in T$$

$$(X.f)(P_\lambda, P_\sigma) = [X, f(P_\lambda, P_\sigma)] - f([X, P_\lambda], P_\sigma) - f(P_\lambda, [X, P_\sigma]) \quad (IX.10)$$

$H^2(T, \mu)^\mu$ est l'ensemble des éléments de $H^2(T, \mu)$ invariant par μ , c'est-à-dire tels que $X.f$ appartienne à la classe de cohomologie nulle, $X \in \mu$. Ceci est toujours vérifié si $X = P_\mu \in T$, donc

$$P_\mu.f \in C^2(T, T) = B^2(T, \mu). \quad (IX.11)$$

Un élément représentatif dans la classe de f est donné par $f_L : T \wedge T \rightarrow L$. Soit $M_{\mu\nu} \in L$: $M_{\mu\nu}.f_L$ est encore une fonction $T \wedge T \rightarrow L$. Alors la condition d'invariance impose : $M_{\mu\nu}.f_L = 0 \forall M_{\mu\nu} \in L$ (car les cobords sont à valeurs dans T). On peut encore écrire cette condition de la façon suivante :

$$f_L \in L(T \wedge T, L)^L, \quad (IX.12)$$

(l'invariance par L signifiant cette fois $l.f_L = 0 \forall l \in L$), T et L étant considérés comme L -modules pour la représentation adjointe. La seule partie invariante par L correspond à la représentation triviale de dimension 1, autrement dit les composantes de f_L correspondent aux coefficients :

$$\alpha_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \text{ tels que : } \alpha_{\rho\sigma}^{\mu\nu} M_{\mu\nu} P^\rho P^\sigma \quad (IX.13)$$

soit un scalaire pour le groupe $O(p, q) = L$ (où l'on considère $P^\rho P^\sigma$ comme éléments indépendants (et ordonnés) de l'algèbre).

En définitive, à ce stade, c'est une simple conséquence du théorème de Serre et Hochschild que la déformation de $\mu = T \times L$ produit semi-direct d'une algèbre de Lie abélienne T et semi-simple L soit modulo les termes en t^2 , de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]_t &= [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] \\
 [M_{\mu\nu}, P_\rho]_t &= [M_{\mu\nu}, P_\rho] \\
 [P_\mu, P_\nu]_t &= t \sum_{\sigma\lambda} \alpha_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} M_{\sigma\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{t^2}$$

(Un résultat obtenu géométriquement par Page et Richardson indique que toute déformation de $T \times L$ est isomorphe à une algèbre où le seul crochet différent est $[T, T]$ qui est à valeurs dans L), [Ri2].

Les éléments $\alpha_{\mu\nu}^{\sigma\lambda}$ sont déterminés par la condition (IX.13).

Cas où $p+q = n \neq 4$: dans ce cas, le seul invariant possible correspond à $\alpha_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = g_\rho^\mu g_\sigma^\nu$. Il est facile de vérifier que l'élément f_L correspondant est bien un cocycle (différent d'un cobord) :

$$f(P_\rho, P_\sigma) = M_{\rho\sigma}, \tag{IX.14}$$

et par conséquent, on a le résultat :

$$\dim H^2(\mu, \mu) = 1 \quad \text{pour} \quad \mu = I0(p, q) \quad p+q \neq 4.$$

Cas où $p+q = n = 4$: c'est par exemple la situation de l'algèbre du groupe de Poincaré $I0(3, 1)$. Il y a deux invariants possibles (l'espace $L(T \wedge T, L)^L \simeq L(D^{1/2, 1/2} \wedge D^{1/2, 1/2}, D^{10} + D^{01})^L$ est de dimension 2, car D^{00} y est contenu deux fois). Ce sont :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \alpha_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= g_\rho^\mu g_\sigma^\nu \\
 (b) \quad \alpha_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= \varepsilon_{\rho\sigma}^{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{IX.15}$$

Mais on peut alors vérifier que l'application

$$f(P_\mu, P_\nu) = \varepsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}$$

n'est pas un cocycle. Il reste seulement la solution précédente.

Donc, dans tous les cas :

$\dim H^2(\mu, \mu) = 1$, un élément représentatif étant fourni par (IX.14).

Nous pouvons donc en déduire qu'il y a au plus une seule direction tangente non triviale de déformation. Il reste à examiner l'intégrabilité de ce cocycle. Pour cela, nous allons calculer le groupe $H^3(\mu, \mu)$.

2) Calcul de $H^3(\mu, \mu)$

Le théorème de Serre et Hochschild donne dans ce cas (en tenant compte de ce que $H^0(T, \mu)^\mu = 0$) :

a) Les cobords $B^3(T, \mu)$

$\varphi = \varphi_L + \varphi_T \in L^3(T, \mu)$ est un 3-cobord s'il existe une fonction $\phi : T \wedge T \rightarrow \mu$ telle que :

$$\varphi(P_\mu, P_\nu, P_\rho) = (\delta\phi)(P_\mu, P_\nu, P_\rho) = \sum_{\rho(\mu, \nu, \rho)} [P_\mu, \phi(P_\nu, P_\rho)] \quad , \quad (\text{IX.17})$$

T étant un idéal, la composante φ_L est nulle.

$$\text{Définissons : } \phi(P_\mu, P_\nu) = \sum_{\rho\sigma} C_{\mu\nu}^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}$$

$$\varphi_T(P_\mu, P_\nu, P_\rho) = \sum_\lambda \alpha_{\mu, \nu, \rho}^\lambda P_\lambda \quad .$$

La condition (IX.17) est équivalente à :

$$\alpha_{\mu, \nu, \rho}^\lambda = 2[C_{\mu\nu}^{\lambda\rho} g_{\rho\rho} + C_{\nu\rho}^{\mu\lambda} g_{\mu\mu} + C_{\rho\mu}^{\lambda\nu} g_{\nu\nu}] \quad . \quad (\text{IX.18})$$

Or, il est toujours possible de trouver un ensemble de coefficients $C_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ vérifiant (IX.18) (qui n'est plus uniquement déterminé dans ce cas). Par exemple, il suffit de prendre :

$$C_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \left[\frac{4}{3} \alpha_{\nu\sigma\mu}^{\rho} g^{\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \alpha_{\nu\sigma\rho}^{\mu} g^{\rho\rho} g^{\sigma\sigma} g_{\mu\mu} + \frac{1}{2} \alpha_{\sigma\mu\rho}^{\nu} g^{\rho\rho} g^{\sigma\sigma} g_{\nu\nu} + \alpha_{\nu\mu\rho}^{\sigma} g^{\rho\rho} \right] \quad (\text{IX.19})$$

On a donc : $B^3(T, \mu) = C^3(T, T)$.

b) Les cocycles $Z^3(T, \mu)$ invariants par μ

La condition $f \in Z^3(T, \mu)$ concerne seulement la composante f_L à valeurs dans L .

La condition d'invariance sur les cocycles se ramène exactement de la même façon que dans le cas précédent à la condition :

$$M_{\mu\nu} \in L \quad M_{\mu\nu} \cdot f_L = 0 \quad .$$

En d'autres termes :

$$f_L \in L(\wedge^3 T, L)^L \quad , \quad (\text{IX.20})$$

ou encore les composantes de f_L sont :

$$f_L(P_\mu, P_\nu, P_\rho) = \sum_{\lambda\sigma} C_{\mu\nu\rho}^{\lambda\sigma} M_{\lambda\sigma}$$

où les $C_{\mu\nu\rho}^{\lambda\sigma}$ sont antisymétriques en $\mu\nu\rho$, en $\lambda\sigma$ et telles que

$$C_{\mu\nu\rho}^{\lambda\sigma} M_{\lambda\sigma} P^\mu P^\nu P^\sigma \quad (\text{IX.21})$$

soit un scalaire (avec la même remarque que précédemment : les éléments P^μ , etc..., sont des vecteurs indépendants et il vaudrait mieux écrire :

$$C_{\mu\nu\rho}^{\lambda\sigma} M_{\lambda\sigma} X^\mu Y^\nu Z^\sigma \quad (\text{IX.21'})$$

où les X, Y, Z sont trois vecteurs) .

On est donc amené à distinguer les deux cas suivants :

Cas où $p+q = n \neq 5$: il n'existe pas d'éléments vérifiant (IX.21').
Donc : $H^3(\mu, \mu) = 0$.

Cas où $p+q = 5$: il existe un élément invariant correspondant à :

$$f_L = (P_\mu, P_\nu, P_\rho) = \sum_{\sigma\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\rho}^{\sigma\lambda} M_{\sigma\lambda}.$$

Mais, cette fois encore, on n'obtient pas un cocycle. En effet :

$$\begin{aligned} \delta f_L(P_\mu, P_\nu, P_\rho, P_\sigma) &= - [P_\mu, f(P_\nu, P_\rho, P_\sigma)] + [P_\nu, f(P_\mu, P_\rho, P_\sigma)] \\ &\quad - [P_\rho, f(P_\mu, P_\nu, P_\sigma)] + [P_\sigma, f(P_\mu, P_\nu, P_\rho)] \\ &= (\varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu a} - \varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu a} + \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho a} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma a}) P_a \\ &= 4\varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu a} P_a. \end{aligned}$$

Et, par conséquent, dans tous les cas,

$$\underline{H^3(\mu, \mu) = 0}$$

Il n'y a donc pas de condition d'intégrabilité (cf. II) : les algèbres μ sont des points simples de la variété et le cocycle fourni par (IX.14) est un vecteur tangent à la variété. Il est facile de voir qu'une déformation de $I0(p, q)$ correspond à :

$$[P_\mu, P_\nu]_t = t M_{\mu\nu}$$

les autres crochets restant inchangés.

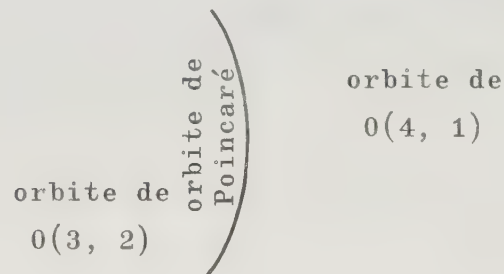
Pour $t > 0$, cette algèbre est isomorphe à $0(p+1, q)$ et pour $t < 0$ à $0(p, q+1)$. (Il suffit de poser $P_\mu = M_{\mu, n+1} \sqrt{|t|}$.) On trouve
si $t > 0$, $g_{n+1, n+1} = +1$
si $t < 0$, $g_{n+1, n+1} = -1$.

Ces algèbres sont semi simples et, par conséquent, toutes les déformations triviales des algèbres $I0(p,q)$ restent soit dans l'orbite de $0(p,q+1)$, soit dans l'orbite de $I0(p+1,q)$.

Cas particulier de Poincaré = $I0(3,1)$

Résumons les résultats dans ce cas. Les seules déformations possibles de l'algèbre de Lie de Poincaré, c'est-à-dire les seules algèbres qui se contractent dans l'algèbre de Poincaré, sont celles correspondant aux deux groupes de De Sitter : $0(3,2)$ et $0(4,1)$.*

Géométriquement, la situation se comprend bien : l'orbite de Poincaré est faite de points simples, donc appartenant à une composante irréductible $\mathcal{C}$ bien déterminée de la variété L_{10} . La dimension de cette orbite est $n^2 - n - 1$, avec $n = 10$, soit 89, et elle est de codimension 1 dans $\mathcal{C}$. Il y a une seule direction de déformation non triviale (ce qui correspond à $H^2(P,P) = H^{2int}(P,P) = 1$, mais suivant le sens on peut aller soit dans $0(3,2)$, soit dans $0(4,1)$. Autrement dit, la situation peut se représenter par le schéma suivant :



Déformation de Poincaré

(On a un schéma analogue pour toutes les algèbres $I0(p,q)$.)

* Le fait que l'algèbre $0(5)$ ne convient pas résulte par exemple du théorème dû à Richardson (Ch.VIII).

Les groupes $IU(p,q)$

On peut faire une application semblable aux groupes (pseudo) unitaires inhomogènes $IU(p,q)$. Pour simplifier, considérons l'algèbre $IU(n)$, dont une base est formée, par exemple, de générateurs A^i_j, I^i_i tels que $(A^i_j)^+ = A^j_i, (I^i_i)^+ = I^i_i, i, j = 1, 2 \dots n$ où les (A^i_j) forment l'algèbre $U(n)$

$$[A^i_j, A^k_l] = \delta^i_l A^k_j - \delta^k_j A^i_l$$

$$[A^i_j, I^k_k] = -\delta^k_j I^i_i$$

$$[A^i_j, I^i_i] = \delta^i_i I_j$$

La représentation adjointe de $U(n)$ se décompose en la représentation identique, plus une représentation irréductible de dimension n^2-1 . Les générateurs I^k_k engendrent une représentation irréductible (vectorielle) de dimension n . Sauf pour $n = 1$, ces représentations n'ont pas de composantes communes et d'après l'étude faite en VII, on en déduit que :

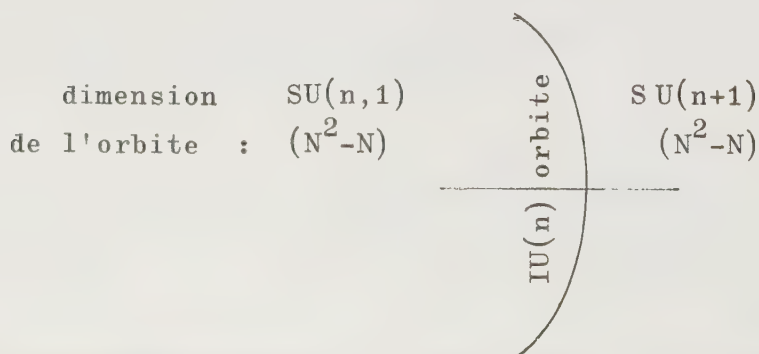
$$\dim H^1(\mu, \mu) = 1$$

pour $\mu = IU(n)$ et donc que

$$\underline{\dim 0(\mu) = N^2 - N - 1}$$

(car μ n'a pas de centre) avec $N = n(n+2)$ dimension de l'espace vectoriel sous-jacent V .

Les autres résultats sont exactement analogues au cas précédent. Finalement, on peut refaire un schéma :



Ce sont les algèbres $SU(n+1)$, et non $U(n+1)$, qui interviennent. La dimension de l'algèbre $SU(n+1)$ est $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$

X - DEFORMATIONS DE L'ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE DE GALILÉE

Des motivations aussi bien d'ordre cinématique que dynamique nous semblent justifier le calcul des déformations de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée.

Motivations cinématiques

Elles nous sont fournies par une étude de H. Bacry et J. M. Lévy-Leblond [B-LL] : sous des hypothèses assez générales, ces auteurs montrent que les algèbres de Lie de groupes cinématiques concevables doivent figurer parmi les déformations d'une algèbre de dimension 10, "l'algèbre statique", somme directe de l'algèbre du groupe euclidien de l'espace $E(3)$ et d'une algèbre abélienne formée de générateurs de translation dans le temps H , et de transformations "d'inertie" K_i , $i = 1, 2, 3$. En imposant que la parité et le renversement du temps soient des automorphismes, ils obtiennent que l'ensemble des algèbres possibles est étonnamment restreint : outre les algèbres attendues (Galilée, Poincaré, De Sitter), on ne trouve ainsi que les algèbres dites de "Newton", qui peuvent décrire un espace courbe non relativiste, "intermédiaires" entre les algèbres de De Sitter et de Galilée (déformation de celle de Galilée et contraction de l'algèbre du groupe de De Sitter).

En fait, comme nous allons le voir dans ce chapitre, l'algèbre de Lie du groupe de Galilée admet un grand nombre de déformations non isomorphes (en particulier, on trouve une famille d'orbites continue, comme nous l'avons déjà rencontré dans l'étude de la dimension 3). Les algèbres nouvelles que nous obtenons ne sont donc pas invariantes par les 2 automorphismes, parité et renversement du temps : certains seront invariants par l'un des deux ; d'autres par aucun.

Motivations dynamiques

Elles se réfèrent à l'utilisation des "groupes dynamiques" (groupe de "non invariance").

Un des premiers exemples d'un tel groupe est fourni par $O(4,1)$ pour décrire l'ensemble des états liés de l'atome d'hydrogène non relativiste. En fait, l'exemple le plus simple d'un groupe dynamique est celui fourni justement par le groupe de Galilée pour décrire une particule libre : l'hamiltonien du système est un des générateurs de l'algèbre H et une représentation irréductible $[LL]$ décrit une particule de masse m , de spin s (à une énergie interne arbitraire près). Dès lors, il est tout à fait concevable, comme l'exposent H. D. Doebner et O. Melsheimer [D-M], de chercher un groupe dynamique correspondant à un hamiltonien $H(\lambda)$ tel que $H(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} H_0$ parmi les déformations d'une telle algèbre : résultat que l'on peut d'ailleurs étendre à plusieurs particules.

Nous montrerons d'abord que l'orbite de Galilée est de dimension 88 (celle de Poincaré est de dimension 89). Nous calculerons ensuite les déformations par étapes successives, pour des raisons techniques : déformations au premier ordre de Galilée, déformations au premier ordre des algèbres obtenues. Bien entendu, on ne peut pas affirmer que par un tel procédé on obtienne toutes les déformations possibles (bien que cela semble vraisemblable).

Notations : nous prenons les relations de commutation suivantes : [L.L]

$$\begin{array}{l}
 \text{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} [J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k \\ [J_i, P_j] = i \varepsilon_{ijk} P_k \\ [J_i, H] = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} [K_i, K_j] = 0 \\ [K_i, P_j] = 0 \quad (i \delta_{ijm} I)^* \\ [K_i, H] = i P_i \\ [P_i, P_j] = 0 \\ [P_i, H] = 0 \end{array} \right. \quad (X.1)
 \end{array}$$

Cette algèbre μ est le produit semi-direct de l'algèbre des rotations (J_i) , avec un idéal (K_i, P_i, H) résoluble mais non abélien. De plus, la représentation des rotations dans cet idéal est réductible (deux vecteurs et un scalaire). On ne peut donc pas appliquer les résultats de la partie VII, ni non plus les résultats de Hermann et Richardson sur les produits semi-directs. Le seul résultat général dont on dispose concerne la stabilité des sous-algèbres semi-simples** [Ri 2] : nous chercherons donc les algèbres déformées en gardant fixes tous les commutateurs contenant J_i , c'est-à-dire que nous nous intéresserons seulement à la partie (b) des relations de commutation.

* si l'on considère l'extension centrale de Galilée.

** cela résulte aussi du théorème de Serre-Hochschild.

1. L'orbite de l'algèbre de Galilée

Le centre de μ_- est nul, et par conséquent la dimension de l'orbite est d'après le chapitre II :

$$\dim 0(\mu_-) = 100 - 10 - \dim H^1(\mu, \mu_-)$$

Nous devons calculer $H^1(\mu, \mu_-)$: donnons explicitement le calcul dans le cas de Galilée (nous donnerons seulement le résultat pour les algèbres déformées). Le théorème de Serre et Hochschild donne toujours :

$$H^1(\mu, \mu_-) \simeq H^1(R, \mu_-)$$

en posant $R = (K_i, H, P_i)$, ce qui signifie qu'il suffit de calculer la cohomologie relative à la partie semi-simple : ici $L = (J_i)$, algèbre de rotations.

Soit $\varphi : R \rightarrow \mu_-$ une 1-cochaine. On prolonge φ de $\mu \rightarrow \mu_-$ par $\varphi(L) = 0$, (cohomologie relative à L). La condition de cocycle, faisant intervenir L , s'écrit

$$[J_i, \varphi(R_\alpha)] = \varphi([J_i, R_\alpha]) \text{ pour } J_i \in L, R_\alpha \in R,$$

(ou encore c'est une condition d'invariance par rapport à L : $J_i \cdot \varphi = 0$).

Pour en tenir compte, il est nécessaire de conserver le caractère vectoriel ou scalaire de R_α , c'est-à-dire de prendre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(K_i) = \alpha P_i + \beta K_i + \gamma J_i \\ \varphi(P_i) = \alpha' P_i + \beta' K_i + \gamma' J_i \\ \varphi(H) = \varepsilon H \end{array} \right. \quad (X.2)$$

Ecrivons maintenant la condition de cocycle par rapport à R :

$$[R_\alpha, \varphi(R_\beta)] - [R_\beta, \varphi(R_\alpha)] - \varphi[R_\alpha, R_\beta] = 0 \quad R_\alpha, R_\beta \in R.$$

On obtient : $\gamma = \gamma' = 0$ avec (P_i, K_j)

$$\beta' = 0, \quad \alpha' = \beta + \varepsilon \quad \text{avec } (H, K_i) ,$$

et les autres conditions sont vérifiées.

La forme générale d'un cocycle nul sur $L = (J_i)$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(K_i) = \alpha P_i + \beta K_i \\ \varphi(P_i) = (\beta + \varepsilon) P_i \\ \varphi(H) = \varepsilon H \end{array} \right.$$

La forme générale d'un cobord nul sur L s'obtient immédiatement puisque la seule possibilité est $\delta H(J_i) = [H, J_i] = 0$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta H(K_i) = -i P_i \\ \delta H(P_i) = 0 \\ \delta H(H) = 0 \end{array} \right.$$

Le groupe $H^1(\mu, \mu)$ peut donc être paramétré par les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(K_i) = \beta K_i \\ \varphi(P_i) = (\beta + \varepsilon) P_i \\ \varphi(H) = \varepsilon H \end{array} \right.$$

Il est de dimension 2. D'où :

$$\underline{\dim O(\mu)} = 88 \quad (X.3)$$

L'orbite de l'algèbre de Galilée a donc seulement une dimension de moins que celle de l'algèbre de Poincaré.

2. $H^2(\mu, \mu)$

Pour étudier les déformations de Galilée, nous devons commencer par calculer le groupe $H^2 \text{ int}(\mu, \mu)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents à la variété L_{10} .

Le calcul direct du $H^2(\mu, \mu)$ se fait de la même façon que celui du H^1 , en calculant seulement la cohomologie relative à L , ce qui revient à se limiter à des 2-cochaines de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi(K_i, K_j) &= \varepsilon_{ijk} (\alpha J_k + \beta P_k + \gamma K_k) \\ \varphi(P_i, P_j) &= \varepsilon_{ijk} (\alpha' J_k + \beta' P_k + \gamma' K_k) \\ \varphi(P_i, H) &= \alpha'' J_i + \beta'' P_i + \gamma'' K_i \\ \varphi(K_i, H) &= \lambda' J_i + \mu' P_i + \nu' K_i \\ \varphi(K_i, P_j) &= \varepsilon_{ijk} (\lambda J_k + \mu P_k + \nu K_k) + \varepsilon \delta_{ij} H\end{aligned}\tag{X.4}$$

φ est nul dès que l'un de ses arguments au moins appartient à $L = (J_i)$. L'espace des 2-cochaines dépend de 16 paramètres.

En écrivant les conditions de cocycles dont la forme générale est :

$$\sum_{\rho(\alpha, \beta, \gamma)} [R_\alpha, \varphi(R_\beta, R_\gamma)] - \sum_{\rho(\alpha, \beta, \gamma)} \varphi([R_\alpha, R_\beta], R_\gamma) = 0 \quad R_\alpha(\beta, \gamma) \in R,$$

on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \lambda = 0 && \text{pour } (K, P, P) \\ \alpha &= -\varepsilon && \text{pour } (K, K, P) \\ \alpha'' + \gamma' &= 0, && \nu = \lambda' + \beta' && \text{pour } (K, P, H) \\ \nu &= -\lambda' && \gamma = 2\mu && \text{pour } (K, K, H) \\ \gamma' &= 2\alpha'' && && \text{pour } (H, P, P),\end{aligned}\tag{X.5}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \lambda = \gamma' = \alpha'' = 0 \\ \alpha &= -\varepsilon && \beta' = 2\nu = -2\lambda' && \gamma = 2\mu.\end{aligned}$$

L'espace $Z^2(\mu, L, \mu)$ est donc de dimension 8. (Nous indiquons par cette notation qu'il s'agit de cohomologie relative à L.)

$$\underline{B^2(\mu, L, \mu)}$$

Nous devons déterminer les 2-cocycles φ qui sont de la forme :

$$\varphi(R_\alpha, R_\beta) = \delta\varphi(R_\alpha, R_\beta) = [R_\alpha, \varphi(R_\beta)] - [R_\beta, \varphi(R_\alpha)] - \varphi([R_\alpha, R_\beta]) \quad \text{pour } R_\alpha, R_\beta \in R,$$

avec $\varphi : R \rightarrow \mu$, quelconque.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(K_i) &= c_i H + d_i^1 J_1 + e_i^1 K_1 + f_i^1 P_1 \\ \varphi(P_i) &= a_i H + b_i^1 J_1 + g_i^1 K_1 + h_i^1 P_1 \\ \varphi(H) &= \varepsilon_i P_i + \delta K + \mu_i J_i + \nu_i K_i, \end{aligned}$$

(somme sur les indices répétés).

En écrivant explicitement la condition de cobord pour φ , on exprime les composantes α, β , etc... de φ en fonction de paramètres $(a_i, c_i, \dots)$ de φ . En éliminant ceux-ci, on obtient finalement les conditions suivantes sur les composantes d'un 2-cobord :

$$\begin{aligned} \gamma'' = \alpha'' = \gamma' = \alpha = \varepsilon = \alpha' = \lambda = 0 = \beta \\ \gamma = 2\mu, \beta' = 2\nu = -2\lambda', \beta'' = -\nu' \end{aligned} \tag{X.6}$$

dont on peut vérifier qu'elles contiennent bien les conditions de cocycle antérieures (X.5). La dimension de $B^2(\mu, \mu)$ est alors 4, d'où finalement :

$$\underline{\dim H^2(\mu, \mu) = 4} \tag{X.7}$$

Les éléments représentatifs de $H^2(\mu, \mu)$ dépendent finalement de 4 paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ que l'on peut choisir de la façon

suivante :

$$\begin{aligned}
 \varphi(K_i, K_j) &= \varepsilon_{ijk} (\alpha J_k + \beta P_k) \\
 \varphi(P_i, P_j) &= 0 \\
 \varphi(P_i, H) &= \gamma K_i \\
 \varphi(K_i, H) &= \delta K_i \\
 \varphi(K_i, P_j) &= -\alpha \delta_{ij} H
 \end{aligned} \tag{X.8}$$

Nous avons donc a priori 4 directions indépendantes de déformations, dont il reste à étudier l'intégrabilité.

3. Déformations au 1er ordre de l'algèbre de Galilée

Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que les déformations au 1er ordre, c'est-à-dire qui ont la forme suivante :

$$[R_\alpha, R_\beta]_t = [R_\alpha, R_\beta] + it \varphi(R_\alpha, R_\beta)^* \text{ où } R_\alpha, R_\beta \in \mathcal{R},$$

les autres crochets restant inchangés (crochets (a)).

Les conditions d'intégrabilité (II) se ramènent donc seulement à :

$$\sum_{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} \varphi(\varphi(R_\alpha, R_\beta), R_\gamma) = 0.$$

Avec la forme précédente pour φ , cela donne :

$$\alpha\delta = \beta\delta = \gamma\beta = 0 \tag{X.9}$$

comme équations pour $H^2 \text{ int}(\mu, \mu)$.

* Nous mettons ce i pour respecter l'écriture que nous avons choisie des relations de commutation de Galilée ; cela n'empêche pas les groupes que nous avons calculés d'être définis sur les réels et d'être, par exemple pour H^2 de dim 4 sur $\mathcal{R}$: il serait bien sûr possible de supprimer partout ce i ; nous le gardons pour conserver l'écriture habituelle en physique.

Il est facile d'en déduire qu'il y a bien 4 direction indépendantes de déformation ; ce sont :

a) $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, ce qui correspond à la déformation :

$$[K_i, K_j]_t = it\alpha \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[K_i, P_j]_t = -it\alpha \delta_{ij} H \quad .$$

Les autres crochets restant inchangés.

$t = 1$, $\alpha = -1$ est l'algèbre de Poincaré (en général pour α négatif)
 $\alpha = +i$ est l'algèbre $IO(4)$ (" " "-i α positif).

Suivant le signe de t , un même cocycle donne donc lieu à 2 déformations différentes : on retrouve une situation analogue à celle décrite dans le cas de l'algèbre de Poincaré (situation spécifique à des algèbres réelles).

b) $\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta = \delta = 0$. Le seul nouveau crochet est :

$$[P_i, H]_t = it \gamma K_i \quad .$$

Là encore, le signe de γ est invariant par les opérations de $GL(V)$. Cette déformation correspond à deux algèbres, que l'on appelle algèbres de Newton, suivant [B. LL']

$$t \gamma > 0 \quad N_-$$

$$t \gamma < 0 \quad N_+$$

c) $\beta \neq 0$, $\alpha = \gamma = \delta = 0$

$$[K_i, K_j]_t = it \beta \varepsilon_{ijk} P_k \quad .$$

Le signe de β n'est pas invariant (on peut faire le changement de base

$P'_i = \varepsilon P_i$, $H' = \varepsilon H$). Cette déformation correspond à une algèbre bien déterminée ($\forall t, \beta$) que nous appelons μ_1 (pour $t \beta = -1$).

d) $\delta \neq 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$: on a aussi une famille d'algèbres isomorphes :

$$\mu_t : [K_i, H]_t = i(t \delta) K_i + i P_i .$$

Les autres crochets restant inchangés. En particulier $[H, P_i]_t = 0$. Nous prenons comme élément représentatif de cette orbite l'algèbre suivante :

$$\mu_2 \left\{ \begin{array}{l} [K_i, H] = i P_i \\ [P_i, H] = i P_i \end{array} \right. .$$

μ_2 est isomorphe à l'algèbre μ_t précédente avec le changement de base :

$$P'_i = \frac{P_i + t \delta K_i}{t \delta} \quad H' = \frac{H}{t \delta}$$

En résumé, nous avons 4 directions intégrables qui nous conduisent à 4 types de déformations au 1er ordre. Ce sont :

1) Poincaré, $IO(4)$, 2) N_+ et N_- , 3) μ_1 , 4) μ_2 .

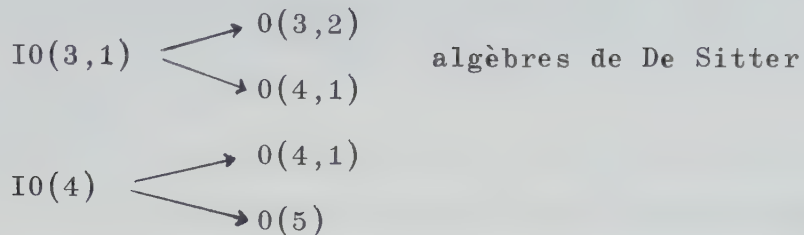
4. Déformations au 1er ordre des algèbres déformées

Nous savons que la composition (c'est-à-dire la succession) de deux déformations au 1er ordre, dépendant d'un paramètre, est une déformation dépendant de deux paramètres, d'ordre (total) 2. En fait, nous allons voir que les déformations linéaires en t des algèbres précédentes sont équivalentes à des déformations dépendant d'un paramètre mais d'ordre supérieur t^2 . (Les calculs sont tout à fait analogues aux précédents ; nous donnerons seulement les résultats en conservant les notations ($X, 4$) pour les $\mathbb{Z}$ -cochaines.

a) $IO(3,1)$ et $IO(4)$

Nous connaissons le résultat d'après la partie (IX) précédente. Les orbites sont de dimension 89 (soit $n^2 - n - 1$, avec $n = 10$). La dimension de $H^2(\mu, \mu)$ est 1 et on a un cocycle intégrable, con-

duisant aux déformations :



Donnons pour le seul cas Galilée $\rightarrow 0(4,1)$ la déformation dépendant de 2 paramètres que l'on obtient en déformant pour la seconde fois l'algèbre μ_t isomorphe à $\text{IO}(3,1)$: on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mu_{-t,t'} \simeq 0(4,1) : \quad & [K_i, K_j]_{tt'} = -i(\varepsilon_{ijk} J_k)t \\
 & [K_i, P_j]_{tt'} = +i \delta_{ij} H t \\
 & [P_i, H]_{tt'} = it' K_i \\
 & [P_i, P_j]_{tt'} = itt' \varepsilon_{ijk} J_k
 \end{aligned}
 \tag{X.10}$$

Les autres crochets sont inchangés

Il est bien évident que cette déformation dans $0(4,1)$ peut s'écrire comme déformation dépendant d'un seul paramètre, mais au 2ème ordre. (Il suffit de faire $t = t'$). Toutefois nous verrons plus loin qu'il peut-être intéressant de conserver les 2 paramètres parce qu'ils peuvent avoir des significations physiques très différentes. [Ch. XVI]

b) Les algèbres de Newton N_+ et N_-

On trouve que le H^1 est de dimension 1, donc que la dimension des orbites est aussi 89 pour ces algèbres.

Choisissons dans l'orbite les points représentatifs suivants :

$$[P_i, H] = -i 0 K_i$$

Les autres crochets restant ceux de Galilée

$$\begin{cases} 0 = +1 & \text{correspond à } N_+ \\ 0 = -1 & \text{" à } N_- \end{cases}$$

En conservant les notations (X.4) pour les cochaînes (les mêmes remarques restent valables sur la cohomologie relative à $L = (J_i)$) on obtient les conditions suivantes pour les cocycles :

$$\gamma' = \beta = \lambda = 0, \quad \alpha' = 0\varepsilon = -0\alpha, \quad \gamma = 2\mu = -20\alpha'', \quad \lambda' = -\nu = -\frac{\beta'}{2}$$

d'où $\dim Z^2(N_{\pm}, L ; N_{\pm}) = 7$

Les conditions sur les cobords sont les suivantes :

$$\lambda = \varepsilon = \alpha = \beta = \alpha' = \gamma' = 0, \quad \gamma = 2\mu = -20\alpha'', \quad \lambda' = -\nu = -\frac{\beta'}{2}, \quad \nu' = -$$

d'où $\dim B^2(N_{\pm}, L ; N_{\pm}) = 5$

et par conséquent :

$$\underline{\dim H^2(N_{\pm}, N_{\pm}) = 2} \quad (X.10)$$

On peut choisir des éléments représentatifs du groupe H^2 : ils dépendent de 2 paramètres α et a :

$$\begin{aligned} \varphi(K_i, K_j) &= \alpha \varepsilon_{ijk} J_k \\ \varphi(P_i, P_j) &= -0 \alpha \varepsilon_{ijk} J_k \\ \varphi(P_i, H) &= 0 \\ \varphi(K_i, H) &= a K_i \\ \varphi(K_i, P_j) &= -\alpha \delta_{ij} H \end{aligned} \quad (X.11)$$

De la même façon on peut déterminer la variété $H^{e \text{ int}}(N, N)$ au 1er ordre. Il est facile de voir que la dimension de $H^{2 \text{ int}}$ est encore deux : il y a deux directions indépendantes de déformations.

- $a = 0 \quad \alpha \neq 0$

pour $0 = +1 \quad (N_+)$ l'algèbre déformée est isomorphe à $0(4,1)$ quelque soit le signe de α ;

pour $0 = -1 \quad (N_-)$ elle est isomorphe à $0(3,2)$.

- $a \neq 0 \quad \alpha = 0$

On obtient une déformation de la forme :

$$[K_i, H]_t = i(P_i + at K_i)$$

les autres crochets restant ceux de $N_{\pm}$ (en particulier $[H, P_i] = 0 \quad iK_i$)

Pour chaque valeur de t , les algèbres obtenues ne sont pas isomorphes. On obtient donc une situation analogue à celle que nous avons rencontrée en dimension 3 avec la famille $A_5(\lambda)$.

Appelons $E(\lambda)$ l'algèbre définie par les relations de commutation

$$E(\lambda) \left\{ \begin{array}{l} [K_i, H] = i(P_i + \lambda K_i) \\ [P_i, H] = -i K_i \end{array} \right.$$

Les autres relations étant celles de Galilée (X.1).

C'est une famille d'algèbres inéquivalentes. On a donc le résultat :

La déformation correspondant au cocycle $a \neq 0, \alpha = 0$ traverse la famille $E(at)$ si on part de N_+ , et $E(-at)$ si on part de N_- .

c) L'algèbre μ_2

Fixons μ_2 par :

$$[H, P_i] = -i P_i$$

les autres commutateurs restant ceux de Galilée (X.1)

L'orbite de μ_2 est de dimension 89 ($H^1(\mu_2, \mu_2)$ est de dimension 1).
Pour les 2-cocycles, on a les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \lambda = \varepsilon = \alpha = 0 = \gamma' \\ \lambda' = -\nu = -\frac{\beta'}{2} = \alpha'' \quad \gamma - 2\mu = -\beta \end{array} \right. \quad (X.12)$$

d'où
$$\underline{\dim Z^2(\mu_2, L; \mu_2) = 7}$$

Les conditions sur les 2-cobords sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \lambda = \varepsilon = \alpha = \gamma' = 0 = \beta \\ \lambda' = -\nu = -\frac{\beta'}{2} = \alpha'' \quad \mu = \frac{\gamma'}{2}, \quad \gamma'' = \nu' \end{array} \right. \quad (X.13)$$

d'où
$$\underline{\dim B^2(\mu_1, L, \mu_2) = 5}$$

et
$$\dim H^2(\mu_2, \mu_2) = \dim H^2(\mu_2, L, \mu_2) = 2$$

Sans détailler davantage les calculs, indiquons que là aussi, il y a deux directions indépendantes de déformations. Au 1er ordre, on obtient les 2 possibilités suivantes :

- une déformation transverse à la famille $E(\lambda)$ (Cf.6) (on peut s'attendre au 2ème ordre ou à des ordres ultérieurs de déformations dans 1 orbite $E(\lambda)$ seule.
- une déformation dans une orbite bien déterminée, dont un élément représentatif est :

$$E_2 \left\{ \begin{array}{l} [H, P_i] = -i P_i \\ [K_i, K_j] = i(\varepsilon_{ijk} (P_k - K_k)) \end{array} \right. \quad (X.14)$$

les autres commutateurs sont ceux de Galilée.

d) L'algèbre μ_1

Prenons comme point représentatif de l'orbite :

$$\mu_1 : \left\{ \begin{array}{l} [K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} P_k \\ \text{les autres relations de commutation étant celles de Galilée} \end{array} \right.$$

Le calcul de $H^1(\mu_1, \mu_1)$ montre qu'il est de dimension 1, donc la dimension de l'orbite est ici aussi 89.

Les conditions sur les 2-cocycles sont :

$$\begin{aligned} \alpha' = \gamma' = \alpha'' = \lambda = \varepsilon = 0 ; \quad \gamma'' + \lambda' + \beta' = \nu ; \quad \alpha + \beta' = \nu \\ 2\lambda' + 2\nu - \gamma'' = 0, \quad 2\nu' - \gamma + 2\mu - \beta'' = 0 \end{aligned} \quad (X.15)$$

$$\text{d'où} \quad \underline{\dim Z^2(\mu_1, L, \mu_1) = 7}$$

et les conditions sur les cobords :

$$\begin{aligned} \alpha' = \gamma' = \alpha'' = \lambda = \varepsilon = \gamma'' = 0, \quad \lambda' = \alpha = -\frac{\beta'}{2} = -\nu, \\ \gamma + 3\beta'' - 2\mu = 0, \quad \nu' = -\beta'' \end{aligned} \quad (X.16)$$

$$\text{d'où} \quad \underline{\dim B^2(\mu_1, L, \mu_1) = 5}$$

et la dimension de $H^2(\mu_1, \mu_1)$ est donc 2.

Le cas de μ_1 est particulier car on peut voir que H^{2int} est de dimension 1 et qu'il y a une direction indépendante de déformations, mais elle peut

cependant conduire à deux déformations différentes (qui sont seulement équivalentes au 1er ordre) :

- L'une a lieu dans l'orbite de l'algèbre E_2 (cf. c)
- l'autre dans l'orbite d'une algèbre E_1 caractérisée par :

$$E_1 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} [K_i, K_j] & = & i \varepsilon_{ijk} P_k \\ [H, K_i] & = & - (P_i + K_i) \\ [H, P_i] & = & - 2 P_i \end{array} \right. \quad (X.17)$$

e) Les algèbres $E_1, E_2, E(\lambda)$

Nous savons que les algèbres $0(4,1), 0(3,2), 0(5)$ semi-simples, sont rigides, c'est-à-dire que les déformations ultérieures sont triviales. Bien que non semi-simples, les algèbres E_1 et E_2 sont également rigides : le calcul direct montre en effet que $H^2(E, E) = 0$ pour ces deux algèbres.

On peut voir aussi que $H^1(E, E) = 0$, et que la dimension de leurs orbites est $n^2 - n = 90$.

La famille $E(\lambda)$: on retrouve la même situation observée en dimension 3 sur $A_5(\lambda)$.

D'une part la dimension de l'orbite de chaque $E(\lambda)$ est $n^2 - n - 1$ car $H^1(E_\lambda, E_\lambda)$ est de dimension 1. La dimension de $H^2(E_\lambda, E_\lambda)$ est également 1 : on pourrait s'attendre en effet à un cocycle intégrable correspondant à la déformation $E(\lambda + t)$. Toute déformation au 1er ordre de E_λ est donc transverse à la famille E_λ .

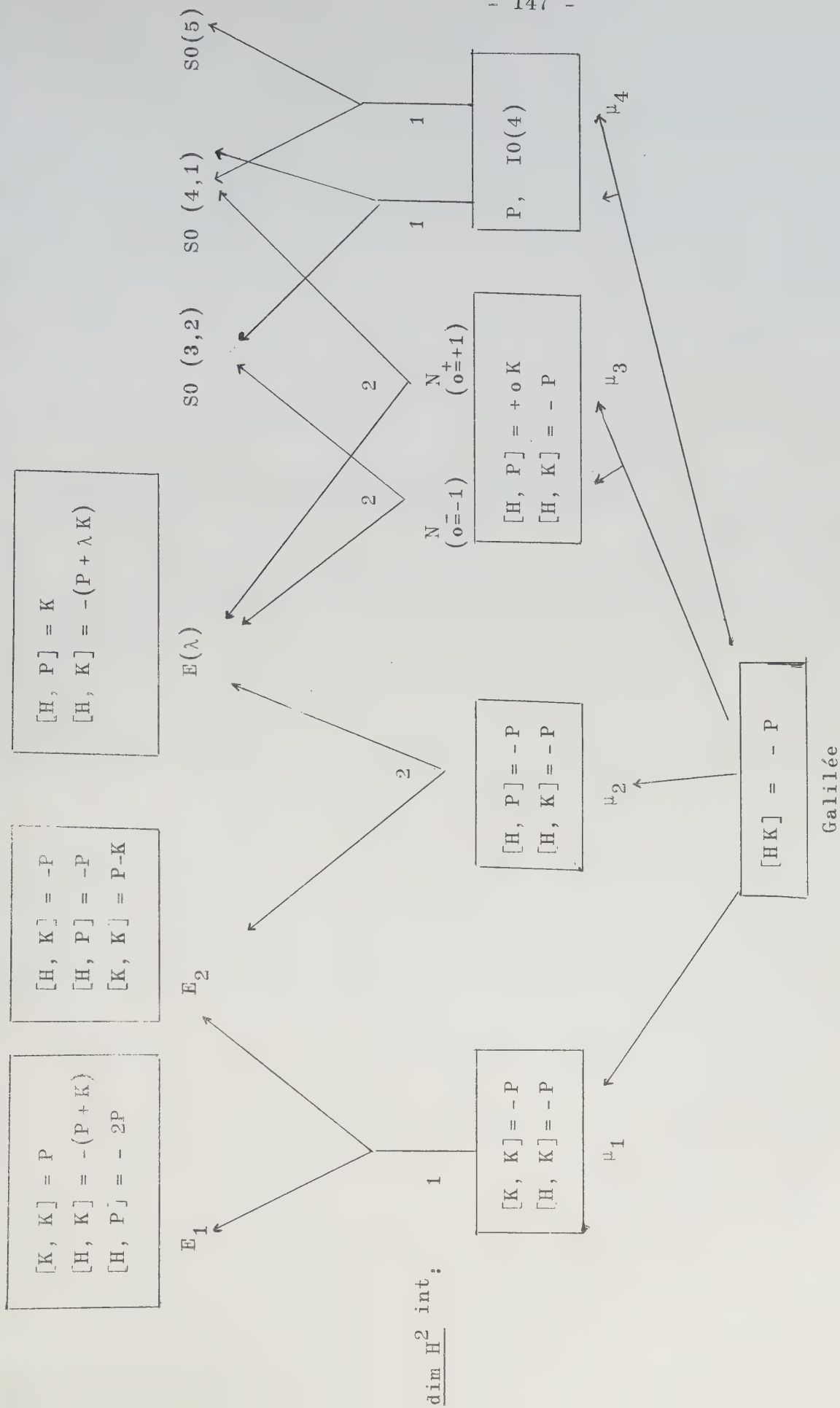
Dans notre cas, par ce processus de déformations successives, nous pensons avoir caractérisé toutes les déformations de l'algèbre de Galilée, mais en général, il n'est pas sûr qu'il fournisse toutes les

déformations : il peut a priori exister des déformations d'ordre élevé qui ne s'obtiennent pas par des successions de déformations du 1er ordre. (Cela signifie encore des déformations d'ordre t^n qui ne s'obtiennent pas à partir d'une déformation dépendant de n paramètres $t_1 = t_2 = \dots t_n$ en faisant $t_i = t$).

Finalement, les résultats peuvent être résumés par les 2 tableaux suivants : (dans le deuxième tableau, on donne seulement les commutateurs "caractéristiques" : ceux contenant J_i sont inchangés).

T A B L E I

Dimension	H^1	H^2	$H^2 \text{ int}$
μ	2	4	4
μ_1	1	2	1
μ_2	1	2	2
$\begin{matrix} N_+ \\ N_- \end{matrix} \mu_3$	1	2	2
$\begin{matrix} P \\ ISO(4) \end{matrix} \mu_4$	1	1	1
E_1	0	0	0
E_2	0	0	0
$\lambda \neq 0 \quad E(\lambda)$	1	1	1
$\begin{matrix} SO(3,2) \\ SO(4,1) \\ SO(5) \end{matrix}$	0	0	0



T A B L E II

Interprétation géométrique

L'algèbre de Galilée n'est pas un point simple de la variété. Elle est à l'intersection d'au moins 2 composantes irréductibles de la variété L_{10} , dans lesquelles son orbite est de codimension 2.

Une composante contient les algèbres semi-simples, une autre contient la famille $E(\lambda)$.

Remarque sur les automorphismes

Considérons les automorphismes "Parité" π et "renversement du temps" θ [B-LL] :

$$\pi : H \rightarrow H ; P_i \rightarrow -P_i, J_i \rightarrow J_i, K_i \rightarrow -K_i$$

$$\theta : H \rightarrow -H, P_i \rightarrow P_i, J_i \rightarrow J_i, K_i \rightarrow -K_i$$

Les seules algèbres admettant π et θ comme automorphismes sont, comme Bacry et Levy-Leblond l'ont montré, les algèbres de Newton et Poincaré $IO(4)$ et de De Sitter $SO(4,1)$, $SO(3,2)$ ainsi que $SO(5)$.

Il est clair que la propriété d'admettre un automorphisme n'a aucune raison de se conserver par déformation. Par contre, la propriété de ne pas admettre un automorphisme se conserve manifestement : ainsi on a le tableau (en indiquant par + la propriété d'admettre l'automorphisme et par - le contraire) :

	π	θ
μ_2	+	-
μ_1	-	+

E_1	-	-
E_2	-	-
$E(\lambda)$	+	-

D E U X I E M E P A R T I E

D E F O R M A T I O N S S I M U L T A N E E S
D ' A L G E B R E S E T D E R E P R E S E N T A T I O N S

XI - DEFORMATION DES REPRESENTATIONS

A. DEFINITION. CONDITIONS D'INTEGRABILITE

a) Définition

Ce sont le plus souvent les représentations des algèbres qui interviennent en physique, nous devons donc nous poser le problème de déformer simultanément l'algèbre et ses représentations. Dans le cas de représentations de dimension finie, on peut prendre une définition tout à fait analogue à celle que nous avons examinée en (II), que nous pouvons appeler géométrique. En effet, un couple μ, φ où μ est une algèbre de Lie, et φ une représentation de G dans un espace $L(W)$, est un point d'une variété algébrique $R_{n,m}$, plongée dans l'espace vectoriel $L^2(V, V) \otimes \text{Hom}(V, L(W))$. ($m = \dim W$).

La variété $R_{n,m}$ est définie d'une part par les équations de Jacobi dans $L^2(V, V)$, d'autre part par les équations polynomiales suivantes :

$$\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

On note la loi de μ par le crochet $[,]$.

Une déformation de μ, φ est alors un chemin dans la variété $R_{n,m}$, chemin de source μ, φ et contenu dans un voisinage de μ, φ .

En général, même pour des représentations de dimension infinie, nous appellerons "déformation du couple μ, φ " une famille de couples μ_t, φ_t dépendant continuellement et de façon différentiable d'un paramètre réel t , telle que :

$$\begin{aligned} \mu_t &\rightarrow \mu \\ \varphi_t &\rightarrow \varphi \end{aligned} \quad \text{quand } t \rightarrow 0$$

où $\varphi_t \in L(V, L(W))$, et μ_t est une déformation de l'algèbre de Lie μ .
De plus on a, $\forall t$,

$$\varphi_t[x, y]_t = [\varphi_t(x), \varphi_t(y)]_{L(W)} \quad (XI.1)$$

Dans la suite, nous allons nous placer du point de vue "formel" de Gerstenhaber : les déformations d'algèbres de Lie ou d'endomorphismes seront définies par des séries formelles. Dans le cas de représentation de dimension finie, nous savons d'après le théorème d'Artin [V] que les résultats de rigidité obtenus formellement entraînent une rigidité géométrique.

Soient donc deux séries formelles :

$$\mu_t(x, y) = \sum_n \mu_n(x, y) t^n \quad \text{avec} \quad \mu_0(x, y) = [x, y] \quad (XI.2)$$

$$\varphi_t(x) = \sum_n \varphi_n(x) t^n \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = \varphi, \text{ représentation initiale de } \mu_0$$

L'espace W peut ici être de dimension infinie.

b) Conditions d'intégrabilité

Ce sont d'une part les conditions d'intégrabilité liant les μ_n que nous avons déjà rencontrées dans l'étude des déformations d'algèbre de Lie seules, et d'autre part les relations entre les φ_n et μ_n destinées à assurer la condition (XI,1).

Rappelons que les premières se mettent sous la forme (Ch.II)

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p \cdot q \neq 0}} \mu_p(\mu_q(x, y), z) = + \delta \mu_n(x, y, z) \quad (XI.3)$$

Les secondes sont :

$$\sum_{\substack{p+q = n \\ p \cdot q = 0, 1, \dots, n}} \varphi_p(\mu_q(x, y)) = \sum_{r+s = n} [\varphi_r(x), \varphi_s(y)] \quad (\text{XI.4})$$

On peut encore les écrire de façon à faire apparaître un cobord :

$$\sum_{\substack{p+q = n \\ q \neq 0}} \varphi_p(\mu_q(x, y)) - \sum_{\substack{p+q = n \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_p(x), \varphi_q(y)] = [\varphi(x), \varphi_n(y)] + [\varphi_n(x), \varphi(y)] - \varphi_n([x, y]) \quad (\text{XI.5})$$

Le deuxième membre est un 2-cobord $\delta\varphi_n(x, y)$ de $B^2(\mu, L(W))^{(*)}$, où $L(W)$ est muni de la structure suivante de μ -module :

$$\begin{cases} x \in V \\ A \in L(W) \end{cases} \rightarrow x.A = [\varphi(x), A]$$

Nous noterons ce μ -module $L(W)^\varphi$

Conditions d'intégrabilité au premier ordre :

Nous savons que l'élément μ_1 est un 2-cocycle $\mu_1 \in Z^2(\mu, \mu)$. Les équations (XI.5) donnent pour $n = 1$:

$$\varphi(\mu_1(x, y)) = \delta\varphi_1(x, y) \quad (\text{XI.6})$$

φ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie μ dans $L(W)$, il induit donc un homomorphisme φ entre les groupes de cohomologie $H(\mu, \mu)$ et $H(\mu, L(W)^\varphi)$ (φ commute avec l'opérateur cobord). En particulier, $\varphi(\mu_1(x, y))$ est un 2-cocycle de $Z^2(\mu, L(W)^\varphi)^{(*)}$. La condition (XI.6) exprime alors que ce cocycle doit être un cobord. En d'autres termes φ doit "effacer" la classe de cohomologie de μ_1 .

(*) Cf. Appendice A pour les définitions des groupes de cohomologie.

c) Obstructions

On peut caractériser des "obstructions" à la déformation d'un couple (μ, φ) par deux groupes de cohomologie; en effet, on a le résultat suivant :

Lemme 1 : Supposons que les conditions d'intégrabilité pour les déformations d'algèbres seules (XI.3) soient vérifiées pour $n = 1, 2, \dots, m$, et que les conditions d'intégrabilité pour les déformations correspondantes de représentation (XI.5) soient vérifiées pour $n = 1, 2, \dots, m-1$.

Soit H_m l'élément de $C^2(\mu, L(W)^{\Phi})$ défini par :

$$H_m(x, y) = \sum_{\substack{p+q=m \\ q \neq 0}} \varphi_p(\mu_q(x, y)) - \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_p(x), \varphi_q(y)]$$

Alors $\delta H_m = 0$: H_m est un élément de $Z^2(\mu, L(W)^{\Phi})$.

Démonstration : Alors que dans le cas d'algèbres de Lie seules, la démonstration se fait très simplement en utilisant les propriétés du cup-produit [Cf. Gerstenhaber G1], il ne semble pas que l'introduction des cup-produit et produit intérieur simplifie beaucoup la tâche ici (d'autant plus qu'il serait assez long d'introduire ces notions). Nous donnons donc une démonstration directe, longue, mais sans difficultés. Toutes les formules utilisées sont explicitées en appendice.

On a :

$$\delta(\varphi_p \circ \mu_q)(x, y, z) = \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} [\varphi(x), \varphi_p \circ \mu_q(y, z)] - \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} \varphi_p(\mu_q([x, y], z)) \quad (XI.7)$$

Afin d'utiliser les hypothèses de récurrence, nous devons faire apparaître dans cette expression $\delta\mu_q$ et $\delta\varphi_p$ séparément. On a :

$$(\varphi_p \circ \delta\mu_q)(x, y, z) = \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} \varphi_p([x, \mu_q(y, z)]) - \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} \varphi_p \circ \mu_q([x, y], z) \quad (XI.8)$$

et

$$\delta\varphi_p(x, \mu_q(y, z)) = [\varphi(x), \varphi_p(\mu_q(y, z))] + [\varphi_p(x), \varphi(\mu_q(y, z))] - \varphi_p([\varphi(x), \mu_q(y, z)]) \quad (XI.9)$$

En faisant la somme de 8 et de 9 on obtient :

$$\begin{aligned} \delta(\varphi_p \circ \mu_q)(x, y, z) &= (\varphi_p \circ \delta\mu_q)(x, y, z) + \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} \delta\varphi_p(x, \mu_q(y, z)) \\ &\quad - \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} [\varphi_p(x), \varphi(\mu_q(y, z))] \end{aligned} \quad (XI.10)$$

Dans la définition de H_m , la sommation sur $\varphi_p \circ \mu_q$ n'a lieu que pour des indices p strictement inférieurs à m . Nous pouvons donc appliquer la deuxième hypothèse du lemme à $\delta\varphi_p$ dans (XI.10). Par contre, l'indice q varie de 1 à m inclus et nous avons besoin de la première hypothèse pour exprimer $\delta\mu_q$.

En sommant sur p , la somme des 2 premiers termes de (XI.10) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+s+r=m \\ r.s \neq 0}} \varphi_p \circ \mu_s(\mu_r(x, y), z) + \sum_{\substack{r+s+q=m \\ q.s \neq 0}} \varphi_r \circ \mu_s(x, \mu_q(y, z)) - \sum_{\substack{r+s+q=m \\ r.s.q \neq 0}} [\varphi_r(x), \varphi_s(\mu_q), \varphi_s(\mu_q(y, z))] \\ \mathcal{P}(x, y, z) \quad \mathcal{P}(x, y, z) \end{aligned} \quad (XI.11)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+q=m \\ q \neq 0}} \delta(\varphi_p \circ \mu_q)(x, y, z) &= - \sum_{\substack{\mathcal{P}(x, y, z) \\ r+s+q=m \\ r.s.q \neq 0}} [\varphi_r(x), \varphi_s(\mu_q(y, z))] - \sum_{\substack{\mathcal{P}(x, y, z) \\ p+q=m \\ q \neq 0}} [\varphi_p(x), \varphi(\mu_q(y, z))] \\ &= - \sum_{\substack{\mathcal{P}(x, y, z) \\ r, s, q \text{ tels que} \\ r+s+q=m \\ q.r \neq 0}} [\varphi_r(x), \varphi_s(\mu_q(y, z))] \end{aligned} \quad (XI.12)$$

Comme $q \neq 0$, nous pouvons exprimer $\varphi_s \circ \mu_q$ à l'aide de la relation (XI.5) :

$$\sum_{\substack{s+q=m-r \\ q \cdot r \neq 0}} \varphi_s(\mu_q(y, z)) = \sum_{\substack{r \neq 0 \\ r \neq m}} \delta \varphi_{m-r}(y, z) + \sum_{\substack{s+q=m-r \\ s \cdot q \cdot r \neq 0}} [\varphi_s(y), \varphi_q(z)] \quad (\text{XI.13})$$

Rapportant cette expression dans 12, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+q=m \\ q \neq 0}} \delta(\varphi_p \circ \mu_q)(x, y, z) &= + \sum_{\substack{r \neq 0, \quad r \neq m}} [\delta \varphi_{m-r}(x, y), \varphi_r(z)] \\ &\quad \mathcal{P}(x, y, z) \\ &- \sum_{\substack{r+s+q=m \\ s \cdot q \cdot r \neq 0}} [\varphi_r(x), \varphi_s(y), \varphi_q(z)] \\ &= \sum_{\substack{p+q=m, \quad p \cdot q \neq 0}} [\delta \varphi_p(x, y), \varphi_q(z)] \\ &\quad \mathcal{P}(x, y, z) \\ &- \sum_{\substack{r+s+q=m \\ s \cdot q \cdot r \neq 0}} [\varphi_r(x), \varphi_s(y), \varphi_q(z)] \end{aligned}$$

Examinons maintenant le 2ème terme de H_m :

$$\sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_p(x), \varphi_q(y)] \quad \text{que l'on note} \quad \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} (\varphi_p \cup \varphi_q)(x, y)$$

Montrons que :

$$\delta \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} (\varphi_p \cup \varphi_q)(x, y, z) = \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\delta \varphi_p(x, y), \varphi_q(z)] \quad \text{(XI.15)}$$

En effet :

$$\delta(\varphi_p \cup \varphi_q)(x, y, z) = \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} [\varphi(x), [\varphi_p(y), \varphi_q(z)]] - \sum_{\mathcal{P}(x, y, z)} [\varphi_p[x, y], \varphi_q(z)] \quad \text{(XI.16)}$$

En utilisant l'identité de Jacobi, il en résulte (en changeant le nom des indices dans une sommation) :

$$\begin{aligned} \delta \left(\sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} \varphi_p \cup \varphi_q \right)(x, y, z) &= - \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_q(z), [\varphi_p(x), \varphi(y)]] - \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_q(z), [\varphi(x), \varphi_p(y)]] \\ &\quad - \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\varphi_p[x, y], \varphi_q(z)] \\ &= \sum_{\substack{p+q=m \\ p \cdot q \neq 0}} [\delta \varphi_p(x, y), \varphi_q(z)] \end{aligned} \quad \text{(XI.17)}$$

Finalement, en comparant (XI.14) et (XI.17) on obtient :

$$\delta H_m(x, y, z) = - \sum_{\substack{r+s+q=m \\ r, s, q \neq 0 \\ \rho(x, y, z)}} [\varphi_r(x), [\varphi_s(y), \varphi_q(z)]]$$

La symétrie dans les indices r, s, q ramène cette expression à une somme d'identités de Jacobi, ce qui prouve que :

$$\delta H_m(x, y, z) = 0$$

On obtient donc un résultat très semblable à celui que Gerstenhaber avait déjà obtenu dans le cas d'algèbres de Lie seules. Si l'on a pu construire des éléments $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, la possibilité de construire des éléments $(\mu_n$ et $\varphi_n)$ dépend de façon ordonnée de deux cocycles, l'un dans $Z^3(\mu, \mu)$ et l'autre dans $Z^2(\mu, L(W)^\varphi)$ qui doivent être des cobords. Ainsi les obstructions à la déformation dépendent des groupes de cohomologie $H^3(\mu, \mu)$ et $H^2(\mu, L(W)^\varphi)$. En particulier, si ces groupes sont nuls, il n'y a pas d'obstructions à la déformation.

Conséquence : Il est possible qu'une algèbre se déforme, mais qu'il n'y ait pas de déformation correspondante de la représentation, c'est-à-dire qu'il y ait une obstruction nulle dans $H^3(\mu, \mu)$ et non nulle dans $H^2(\mu, L(W)^\varphi)$.

Si l'on considère l'espace formé par la variété L_n , avec au-dessus de chaque point l'espace $\text{Hom}(\mu, L(W))$, un chemin sur la variété L_n peut ne pas se relever en un chemin sur les "fibres".

d) Exemple

Il peut sembler curieux au premier abord qu'il y ait des représentations qui ne se déforment pas, bien que l'algèbre se déforme. Un exemple simple est celui de l'algèbre de Lie euclidien du plan $\mathfrak{L}(E_2)$.

En effet, on a vu que $\mathfrak{L}(E_2)$ a une seule direction de déformation, dans l'orbite des rotations, qui est donnée par

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \lambda^2 e_3 \\ [e_2, e_3] = e_1 \\ [e_3, e_1] = e_2 \end{cases} \quad e_i \in \mathfrak{L}(E_2)$$

Soient J_3 , P_1 et P_2 les opérateurs représentant e_3 , e_1 et e_2 dans un espace de dimension finie p . Prenons comme représentation φ_0 la représentation suivante de E_2 :

$$\begin{array}{l} P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont nuls} \\ J_3 \text{ est diagonal : } J_3 = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & n_2 & \\ & & \ddots \\ & & & n_p \end{pmatrix} \end{array}$$

où $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont des nombres entiers arbitraires. (C'est le type le plus simple de représentations de dimension finie de E_2 : les autres représentations de même dimension, correspondent à P_1 et P_2 non nuls, et triangulaires, mais toujours avec J_3 diagonal).

Il est immédiat que la représentation suivante :

$$\begin{array}{l} J_{1\lambda} = \lambda J_1 \\ J_{2\lambda} = \lambda J_2 \\ J_{3\lambda} = J_3 \end{array}$$

où J_1, J_2, J_3 vérifient les règles de commutation usuelles ($\lambda^2 = 1$), est une représentation de l'algèbre déformée.

Elle ne peut cependant constituer une déformation de φ_0 , que si les nombres n_i ont des valeurs bien déterminées. Par exemple, si on veut pouvoir déformer dans une représentation irréductible des rotations, il faut qu'ils correspondent au spectre habituel de J_3 : $-j, \dots, +j$.

Plus généralement, il faut qu'il existe une partition des nombre n_i (sans tenir compte de l'ordre) :

$$(n_{i_1}, \dots, n_{i_l})(n_{j_1}, \dots, n_{j_k}) \dots$$

tel que chaque sous-ensemble corresponde à un spectre convenable pour J_3 .
(En particulier, on a une condition : $n_{i_l} - n_{i_l+1} = \Delta n_{i_l} = \pm 1$
Si cette condition n'est pas remplie, la représentation φ_0 ne se déforme pas.

B. UN THEOREME DE RIGIDITE

a) Equivalence

Il s'agit de définir une notion d'équivalence pour deux couples (μ, φ) , où μ est une algèbre de Lie, et φ une représentation de μ . $[\varphi : \mu \rightarrow L(W)]$. Définissons d'abord un homomorphisme.

Rappelons que $T \in L(V)$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie μ' dans μ (de même espace vectoriel sous-jacent V) si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & V \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ V \times V & \xrightarrow{\quad \phi' \quad} & V \end{array}$$

c'est-à-dire si : $\phi'(Tx, Ty) = T \phi(x, y) \quad \forall x, y \in V$

(ϕ et ϕ' sont respectivement les lois des algèbres de Lie μ, μ').

De la même façon, si $\phi \in L(W)$, on dira que $\phi' \in L(W)$ est homomorphe à ϕ , s'il existe une application $A \in L(W)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\phi} & W \\ A \downarrow & & \downarrow A \\ W & \xrightarrow{\phi'} & W \end{array}$$

soit : $\phi' A = A \phi$

ce que nous écrirons symboliquement

$$\phi' = A^* \phi$$

Définition 1 : Nous dirons maintenant qu'un couple (μ', φ') est homomorphe à un couple (μ, φ) , s'il existe un couple (T, A) où T est un homomorphisme de l'algèbre de Lie μ' dans l'algèbre de Lie μ , et A une application de $L(W)$, tels que le diagramme ^(*) suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \text{End } W \\ T \downarrow & & \downarrow A^* \\ V & \xrightarrow{\varphi'} & \text{End } W \end{array}$$

c'est-à-dire : $\varphi'(Tx) = A^* \varphi(x) \quad \forall x \in V$

Soit

$$\boxed{\varphi'(Tx)A = A\varphi(x)}$$

Nous dirons que les couples (μ', φ') et (μ, φ) sont isomorphes quand T et A sont inversibles $\begin{cases} T \in GL(V) \\ A \in GL(W) \end{cases}$

On a ainsi défini une action du groupe $GL(V) \times GL(W)$ sur les couples (μ, φ) . On la note :

$$(\mu', \varphi') = (T, A)(\mu, \varphi) \quad (\text{XI.19})$$

(*) A^* n'est pas partout défini, on le suppose cependant défini sur l'image de φ .

Les orbites par ce groupe dans la variété $L_n \times R_m \subset K^n \times L(K^n, \text{End } W)$ sont les classes d'équivalence de couples isomorphes^(*). (R_m est la variété algébrique formée par les homomorphismes de G dans $\text{End } W$. (W espace vectoriel fixé de dimension m).)

Equivalence de deux déformations $(\mu_\lambda, \varphi_\lambda)$ et $(\mu'_\lambda, \varphi'_\lambda)$ d'un même couple (μ_0, φ_0) :

Définition 2 : On dira que ces déformations sont équivalentes^(**) quand il existe un isomorphisme pour toute valeur de λ . C'est-à-dire, il existe un couple $(T_\lambda, A_\lambda) \in G = GL(V_K) \times GL(W_K)$ avec $K = k((t))$, tel que :

$$(\mu'_\lambda, \varphi'_\lambda) = (T_\lambda, A_\lambda)(\mu_\lambda, \varphi_\lambda)$$

En particulier, μ'_λ et μ_λ sont des déformations équivalentes d'algèbres de Lie.

Déformation triviale

Définition 3 : Une déformation $(\mu_\lambda, \varphi_\lambda)$ de (μ_0, φ_0) est triviale si elle reste dans l'orbite de (μ_0, φ_0) .

Il existe donc $(T_\lambda, A_\lambda) \in GL(V_K) \times GL(W_K)$ tels que :

$$\varphi_\lambda(T_\lambda x) A_\lambda = A_\lambda \varphi_0(x) \quad x \in V \quad (\text{XI.20})$$

B. RIGIDITE

Définition 4 : Un couple (μ, φ) formé d'une algèbre de Lie μ , et d'une représentation φ de μ , sera dit rigide, si toutes ses déformations sont triviales.

(*) qui ne comprennent rien de plus que l'ensemble des algèbres isomorphes, et des représentations équivalentes, car $(T, A) = (1, A)(T, 1)$.

(**) Rappelons que nous nous plaçons dans le cas de déformations formelles il s'agit donc aussi d'une équivalence formelle (IV)

B1) Cas de l'algèbre fixe

Tout se passe exactement de la même façon que dans le cas d'algèbres de Lie seules, simplement le groupe de cohomologie qui intervient est différent.

Avec $T_\lambda = 1$, la condition (XI.20) se ramène à l'équivalence de deux représentations. Dans le cas d'une déformation de représentation seule, la définition 4 devient : une représentation φ_0 est rigide, si toutes ses déformations φ_λ lui sont équivalentes.

Il doit exister $A_\lambda \in GL(\mathbb{W})$, tel que :

$$\varphi_\lambda(x) A_\lambda = A_\lambda \varphi_0(x)$$

Supposons que A_λ admette un développement en série :

$$A_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

(ce qui suppose A_0 inversible).

La condition (XI.20) s'écrit :

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p \neq 0}} \varphi_p(x) A_q = [A_n, \varphi(x)] = -\delta A_n(x) \quad (*)$$

En particulier :

pour $n = 0$: A_0 doit appartenir au commutant Γ_{φ_0} de $\varphi_0(x)$.

pour $n = 1$: $\varphi_1(x) = [A_1, \varphi_0(x)] A_0^{-1} = [A_1 A_0^{-1}, \varphi_0(x)] = -\delta(A_1 A_0^{-1})(x)$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 \in B^1(\mu, H(W)^{\varphi_0}) \quad (XI.22)$$

(*) Appendice (A.9)

La condition d'intégrabilité au premier ordre (XI.5) devient ici :

$$\delta\varphi_1(x,y) = 0$$

Donc

$$\varphi_1 \in Z^1(\mu, I(W)^{\varphi_0}) \quad (XI.23)$$

Par conséquent, on a exactement la même situation que dans le cas d'algèbres de Lie seules. On peut démontrer de la même façon, soit géométriquement^(*), soit formellement, le théorème de rigidité correspondant :

Théorème 1 : Dans le cas d'une déformation de représentations seules, une condition suffisante de rigidité est : $H^1(\mu, I(W)^{\varphi}) = 0$

Exemple : Si μ est semi-simple, toute représentation de dimension finie est rigide. (Ce qui n'a plus de raison d'être vrai en dimension infinie : nous verrons plus loin l'exemple de la série continue de $SL(2, \mathbb{R})$).

Cas général

Examinons ce que donne la condition d'équivalence (XI.20) appliquée au couple (μ, φ) et à une déformation (formelle) $(\mu_\lambda, \varphi_\lambda)$ de (μ, φ) . L'équation (XI.20) est alors équivalente à une infinité d'équations :

$$\sum_{\substack{p+q+r=n \\ r \neq n}} \varphi_p(T_q x) A_r = A_n \varphi_0(x) - \varphi_0(T_0(x)) A_n \quad (XI.24)$$

avec

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n \lambda^n \\ A_\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n \\ \varphi_\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \varphi \end{aligned}$$

(*) dans le cas d'un espace W de dimension finie.

Pour $n = 0$, on a :

$$\varphi_0(T_0 x) = A_0 \varphi_0(x) A_0^{-1}$$

Pour $n = 1$,

$$\varphi_1(T_0 x) A_0 + \varphi_0(T_1 x) A_0 = A_1 \varphi_0(x) - \varphi_0(T_0 x) A_1$$

Par exemple, avec $T_0 = 1$, A_0 doit commuter avec φ_0 et

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0(T_1 x) + [A_1, \varphi_0(x)] A_0^{-1} \quad (\text{XI.25})$$

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0(T_1 x) - \delta(A_1 A_0^{-1})(x)$$

donc φ_1 n'est plus un cobord : il apparaît un terme supplémentaire $\varphi_0 \circ T_1$, où T_1 est un élément général de $L(V)$.

Cherchons encore à quelles conditions un couple (μ, φ) est rigide, c'est-à-dire n'a que des déformations triviales. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 2 : Une condition suffisante de rigidité formelle pour un couple (μ, φ) formée par une algèbre de Lie μ et une représentation φ dans un espace W est que : $H^2(\mu, \mu) = 0$ et $H^1(\mu, L(W)^{\otimes}) = 0$.

Nous allons donner une démonstration formelle .

Examinons d'abord le premier ordre en t . La première condition d'intégrabilité s'écrit (XL5) :

$$\varphi_0 \circ \mu_1(x, y) = \delta \varphi_1(x, y)$$

et montre qu'en général φ_1 n'est pas un cocycle.

Puisque $H^2(\mu, \mu) = 0$, nous savons que μ_1 est un 2-cobord, c'est-à-dire qu'il existe une application U de V dans V , telle que $\mu_1 = \delta U$.

On a alors :

$$\varphi_0 \circ \delta U = \delta(\varphi_0 \circ U) = \delta \varphi_1 \quad (\text{XI.26})$$

D'où :

$$\varphi_1 = \varphi_0 U + X \quad (\text{XI.27})$$

X étant un cocycle arbitraire de $Z^1(\mu, L(W))^{\varphi_0}$.

Supposons maintenant $H^1(\mu, L(W))^{\varphi_0} = 0$, il existe $B \in L(W)$ tel que $X = \delta B$, en comparant (XI.27) avec (XI.25), on voit qu'il est possible de trouver T_1, A_1, A_0 de façon que (25) soit vérifié.

Supposons $T_0 = \mathbb{I}$, ce qui suffira pour la démonstration. Les conditions d'équivalence (XI.24) s'écrivent :

$$\sum_{\substack{p+q+r=n \\ r \neq n}} \varphi_p(T_q x) A_r = [A_n, \varphi_0(x)] = -\delta A_n(x) \quad (\text{XI.28})$$

Puisque $H^2(\mu, \mu) = 0$, les résultats sur les algèbres de Lie seules montrent que l'on peut trouver une famille :

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} T_n t^n, \quad T_0 = 1,$$

telle que :

$$\mu_t(T_t x, T_t y) = T_t[x, y] \quad (\text{XI.29})$$

Nous allons montrer alors que la condition $H^1(\mu, L(W)) = 0$ permet de construire $A_t = \sum_n A_n t^n$ vérifiant (28). Nous avons vu qu'il est possible de trouver A_1 . Il suffit alors de procéder par récurrence.

Supposons que l'on ait construit $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ tels que les conditions d'équivalence jusqu'à l'ordre $(n-1)$ soient vérifiées. Ceci peut s'écrire :

$$A_t^{-1} \varphi_t(T_t x) A_t = \varphi_0(x) \pmod{t^n} \quad (\text{XI.30})$$

ou encore :

$$\varphi_t(T_t x) A_t - A_t \varphi_0(x) = X_t(x) \equiv t^n X_n \pmod{t^{n+1}} \quad (\text{XI.31})$$

Nous allons montrer que $X_n \in Z^1(\mu, L(W)^\Phi)$. Alors l'hypothèse $H^1(\mu, L(W)^\Phi) = 0$ entraîne que X_n est un cobord. Mais ceci entraîne que le premier membre de la condition (XI.28) à l'ordre n est également un cobord, et par conséquent, que l'on peut trouver un opérateur A_n vérifiant (XI.28). Par récurrence, il en résultera qu'on peut construire au moins formellement un opérateur $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ vérifiant avec T les conditions (XI.28).

Calculons $\delta X_n(x, y)$:

$$\delta X_n(x, y) = [\varphi_0(x), X_n(y)] - [\varphi_0(y), X_n(x)] - X_n[x, y] \quad (\text{XI.32})$$

modulo t^{n+1} , on peut remplacer $t^n \delta X_n(x, y)$ par :

$$\begin{aligned} \delta X_t(x, y) &= [\varphi_t(T_t x), \varphi_t(T_t y) A_t - A_t \varphi_0(y)] \\ &\quad - [\varphi_0(y), \varphi_t(T_t x) A_t - A_t \varphi_0(x)] \\ &\quad - \varphi_t(T_t[x, y]) A_t + A_t \varphi_0([x, y]) \pmod{t^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{XI.33})$$

Par hypothèse

$$\varphi_t(\mu_t(x, y)) = [\varphi_t(x), \varphi_t(y)]_{L(W)} \quad (\text{XI.34})$$

Ceci joint à (XI.29) entraîne que :

$$\varphi_t(T_t[x, y]) = [\varphi_t(T_t x), \varphi_t(T_t y)]_{L(W)} \quad (\text{XI.35})$$

Développons (XI.33), on obtient (en tenant compte de (XI.35))

$$\begin{aligned}
 & \varphi_t(T_t y) [\varphi_t(T_t x), A_t] - [\varphi_t(T_t x), A_t] \varphi_0(y) \\
 & - A_t [\varphi_t(T_t x), \varphi_0(y)] - [\varphi_0(y), \varphi_t(g_t x)] A_t \\
 & - \varphi_t(g_t x) [\varphi_0(y), A_t] + [\varphi_0(y), A_t] \varphi_0(x) \\
 & = [A_t, [\varphi_0(y), \varphi_t(T_t x)]] + [\varphi_0(y), [\varphi_t(T_t x), A_t]] \\
 & + [\varphi_t(T_t x), [A_t, \varphi_0(y)]] \\
 & + (\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) [\varphi_t(T_t x), A_t] \\
 & + [\varphi_0(y), A_t] (\varphi_0(x) - \varphi_t(T_t x)) \quad (\text{mod } t^{n+1})
 \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Jacobi, ceci se ramène à :

$$(\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) [\varphi_t(T_t x), A_t] + [\varphi_0(y), A_t] (\varphi_0(x) - \varphi_t(T_t x)) \quad (\text{mod } t^{n+1}) \quad (\text{XI.36})$$

Dans le dernier terme, seuls contribuent les A_p , $p < n$, car le coefficient de A_n est $\varphi_0 - \varphi_0 = 0$. Utilisons alors l'hypothèse de récurrence pour $p < n$; nous pouvons remplacer $[\varphi_0(y), A_t]$ par : (Cf. XI.31)

$$[\varphi_0(y), A_t] = - (\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) A_t \quad (\text{XI.37})$$

(XI.36) devient :

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) ([\varphi_t(T_t x), A_t] - A_t (\varphi_0(x) - \varphi_t(T_t x))) \\
 & = (\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) (\varphi_t(T_t x) A_t - A_t \varphi_0(x)) \quad (t^{n+1})
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (XI.31) :

$$t^n \delta X_n(x, y) = (\varphi_t(T_t y) - \varphi_0(y)) X_t(x) \quad \text{modulo } t^{n+1} \quad (\text{XI.38})$$

par hypothèse $X_t \equiv t^n X_n$, nous avons donc seulement besoin du coefficient d'ordre 0, mais celui-ci est $\varphi_0(y) - \varphi_0(y) = 0$.

D'où

$$\delta X_n(x, y) = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Sous-algèbres et sous-représentations correspondantes.

Dans le cas d'une déformation de représentations seulement, on voit tout de suite qu'on a (au sens forme), le résultat suivant :

Si $H^1(S, \mu, L(W)^{\varphi|_S}) = 0$, alors la restriction de la représentation à la sous-algèbre S est rigide.

Géométriquement, il est possible de reproduire pas à pas, en faisant une correspondance convenable, un très intéressant article de S. Page et R.Q. Richardson concernant les déformations de sous-algèbres, basé sur l'utilisation du théorème des fonctions implicites). On obtient un résultat analogue.

Dans le cas d'une déformation couplée d'algèbres et de représentations, nous n'avons que le résultat "formel" qui s'obtient exactement suivant la démonstration du théorème 2 :

Si $H^2(S, V) = 0$ et si $H^2(S, \mu, L(W)^{\varphi|_S}) = 0$, alors le couple $(S, \varphi|_S)$ est rigide.

$\varphi|_S$ désigne toujours la restriction à S de la représentation φ . Mais l'article de Page et Richardson ne semble pas s'étendre facilement au cas des couples d'algèbres de Lie et représentations.

XII - CONTRACTION D'UNE REPRESENTATION

On note toujours l'algèbre de Lie (μ, V) par μ .

La contraction d'une représentation est, de la même façon que pour les algèbres de Lie, un processus inverse de la déformation. En général, il s'agira de contraction d'un couple (μ, φ) où φ est une représentation de l'algèbre de Lie μ dans un espace de représentation W . Il est naturel de prendre une définition tout à fait analogue à celle considérée dans le cas des algèbres de Lie : la contraction est une limite de couples $(\mu_\lambda, \varphi_\lambda)$ isomorphes à (μ, φ) . Plus précisément

Définition : Soient T_λ et A_λ des applications respectivement de $L(V)$ et de $L(W)$, régulières pour $\lambda \neq 0$, et dont l'une au moins est singulière quand $\lambda = 0^*$. Alors on appellera contraction du couple (μ, φ) , le couple (μ', φ') défini par la limite suivante, quand elle existe :

$$(\mu', \varphi') = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (T_\lambda ; A_\lambda) \cdot (\mu, \varphi) \quad (\text{XII.1})$$

μ' est donc l'algèbre contractée de μ par T_λ .

$$\mu'(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_\lambda^{-1} \mu(T_\lambda x, T_\lambda y) \quad (\text{XII.2})$$

et d'après (XI.B) :

$$\varphi'(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda^{-1} \varphi(T_\lambda x) A_\lambda \quad (\text{XII.3})$$

le limite (XII.3) dépend de la topologie choisie sur $L(W)$. Nous utiliserons en général la convergence faible, c'est-à-dire les limites

* Si les deux applications sont régulières, le couple (μ', φ') est isomorphe à (μ, φ) .

d'éléments de la forme $(\xi, \varphi(x)\eta)$ $\xi, \eta \in W$

a) avec cette définition, la représentation contractée est définie dans le même espace de représentation que la représentation initiale. (Eventuellement dans un sous-espace).

b) si l'on introduit, comme dans la référence [N. 2.3] une algèbre de Lie unique, qui remplace le couple (μ, φ) la définition précédente revient à contracter cette algèbre de Lie. En effet, définissons une application bilinéaire de $V \times W \rightarrow V \times W$ par :

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = \mu(x, y) & \text{pour } x, y \in V \\ \sigma(x, \xi) = -\sigma(\xi, x) = \varphi(x)\xi & x \in V, \xi \in W \\ \sigma(\xi, \eta) = 0 & \xi, \eta \in W \end{cases}$$

σ est une algèbre de Lie de dimension $n+m$ ($\mu = \dim W$) sur laquelle on peut faire agir de façon évidente $GL(V \times W)$ et se restreignant aux éléments soit de $GL(V)$, soit de $GL(W)$. Posons $X_\lambda \in GL(V \times W)$ avec $X_\lambda = T_\lambda$ sur V et A_λ sur W

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} X_\lambda^{-1} \sigma(X_\lambda x, X_\lambda y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_\lambda^{-1} \mu(T_\lambda x, T_\lambda y) \quad x, y \in V$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} X_\lambda^{-1} \sigma(X_\lambda x, X_\lambda \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda^{-1} \varphi(T_\lambda x) A_\lambda \xi \quad x \in V, \xi \in W$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} X_\lambda^{-1} \sigma(X_\lambda \xi, X_\lambda \eta) = 0 \quad \xi, \eta \in W$$

Donc l'algèbre σ' obtenue correspond au couple (μ', φ') .

c) dans le cas de représentations de dimension finie, on n'obtient pas de contraction de la représentation seule, sans contracter simultanément l'algèbre. En effet, supposons que $u_\lambda = 1$, et considérons la limite :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda \varphi(x) A_\lambda^{-1}$$

en prenant $A_\lambda = A + \lambda$.

De la même façon que pour les algèbres de Lie, on peut décomposer l'espace W en $W_R \oplus W_N$ par rapport à l'application A , qui est régulière sur W_R et nilpotente sur W_N . Alors :

$$\xi \in W_R \quad \varphi'(x) = A \varphi(x) A^{-1}$$

$$\xi \in W_N \quad \varphi'(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[(A + \lambda) \varphi(x) \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^q (-1)^n \frac{A^n}{\lambda^n} \right] \xi$$

d'où $\varphi'(x) = \varphi(x)$ sur W_R , et

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \frac{1}{\lambda} ([A, \varphi(x)]) - \frac{1}{\lambda^2} [A, \varphi(x)] A + \frac{1}{\lambda^3} \dots$$

la condition d'existence de la limite étant que les termes en $1/\lambda^p$ s'annulent, ce qui revient à

$$[A, \varphi(x)] = 0$$

D'où $\varphi'(x) = \varphi(x)$ sur tout W .

[En prenant $A_\lambda = A + \lambda B_\lambda$ avec B_λ régulière $\forall \lambda$, on obtient $\varphi'(x) = B_0 \varphi(x) B_0^{-1}$ donc $\varphi'(x)$ est équivalente à $\varphi(x)$].

d) la condition (XII.3) correspond exactement à ce que Saletan appelle "sauver une représentation" (dans le cas de représentations de dimension finie). Le mot "sauver" vient de ce que la façon la plus simple de procéder, avec $A_\lambda = 1$, associée à une contraction d'Inonü-Wigner, conduit toujours à une représentation non fidèle de l'algèbre contractée, ce qui n'est plus le cas si on introduit certains A_λ .

Pour illustrer la condition (XII.3) donnons un exemple en dimension finie, du "sauvetage d'une représentation", en utilisant la méthode de Saletan.

Exemple : les représentations de dimension finie de l'Euclidien $E(3)$ obtenues par contraction de celles de $O(4)$.

La contraction de $O(4)$ sur $E(3)$ est la contraction habituelle d'Inonü-

Wigner, c'est-à-dire la contraction autour d'une sous-algèbre, les rotations, qu'elle laisse fixe, le reste devenant abélien. Elle s'obtient avec :

$$\begin{aligned} T_{\lambda}(J_i) &= J_i && \text{pour } J_i \in 0(3) \\ T_{\lambda}(K_i) &= \lambda K_i && \text{pour les 3 autres éléments.} \end{aligned}$$

Une représentation de dimension finie de $0(4)$ est caractérisée par 2 nombres entiers ou $1/2$ entiers (j_0, l) et se décompose sur les rotations suivant :

$$\mathfrak{D}(j_0, l) \big|_{0(3)} = \bigoplus_{j=j_0}^{l-1} \mathfrak{D}(j)$$

Appelons E_j , le projecteur sur l'espace de la représentation $\mathfrak{D}(j)$ et prenons pour A_{λ} l'expression suivante :

$$A_{\lambda} = \sum_j \lambda^j E_j$$

alors

$$A_{\lambda}^{-1} = \sum_j \lambda^{-j} E_j$$

L'expression (XII.3) pour $x = J_i$, donne toujours une limite égale à la représentation initiale $\varphi(J_i)$.

Pour $x = K_i$, on doit chercher la limite de :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j, k} \lambda^{1+j-k} E_k \varphi(K_i) E_j$$

Si cette limite existe, elle est égale à :

$$\varphi'(K_i) = \sum_j E_{j+1} \varphi(K_i) E_j$$

et la condition d'existence est : pour tout $k > j + 1$:

$$E_k \varphi(K_i) E_j = 0$$

Condition qui est ici vérifiée, simplement par application du théorème de Wigner-Eckart.

Le résultat est conforme à ce que l'on sait par ailleurs des représentations de dimensions finie de $E(3)^*$: les "translations" K_i de l'Euclidien sont représentées par des matrices nilpotentes, de la forme :

	D_{j+1}	$\varphi'(K)_{j+1, j}$
		D_j

où les blocs $\varphi'_{j+1, j}(K)$ sont identiques aux $\varphi_{j+1, j}(K)$ dans le cas des rotations. (Ces matrices sont nulles dans les différents blocs D_j)

De telles contractions se rencontrent en physique : un exemple

Un des premiers exemples de contraction rencontré en physique est celui qui accompagne le passage d'une masse positive à une masse nulle. (Cf Robinson [Ro]). L'algèbre de Lie du petit groupe associé à la masse positive, $\mathfrak{L}(O_3)$, se contracte dans l'algèbre de Lie de l'Euclidien à 2 dimensions $\mathfrak{L}(E(2))$. Weinberg a montré comment on obtenait ainsi des restrictions sur la construction des champs explicitement invariants de Lorentz : alors que dans le cas d'une

* Cf l'article sur les représentations de dimension finie Chapitre XIX.

masse strictement positive, on peut utiliser sans contraintes supplémentaires, des champs qui se transforment suivant une représentation $\mathfrak{D}^{j_1, j_2}$ du groupe de Lorentz, dans le cas d'une masse nulle, on ne peut utiliser ainsi que des champs dont la partie d'annihilation se transforme suivant $\mathfrak{D}^{j_1, j_2}$ avec $j_2 - j_1 = \lambda$ λ étant l'hélicité de la particule.

Nous allons décrire ce résultat en montrant comment il est lié à l'apparition de représentations du groupe $E(2)$, non décomposables, tout à fait analogues à celles obtenues précédemment par contraction par $E(3)$.

- Contraction du "petit groupe" :

Considérons une particule de quadri-moment $p^\mu = (1; 0, 0, 1 - t)$ et de masse $m^2 = 1 - (1-t)^2$. ($0 \leq t \leq 1$).

Le "petit groupe" est le sous-groupe" du groupe de Lorentz (ici, nous ne considérons que son recouvrement $SL(2, \mathbb{C})$), qui stabilise p . Ce sont donc des transformations $\Lambda = (\Lambda_\mu^\nu) \in SL(2, \mathbb{C})$ telles que :

$$\Lambda_\mu^\nu p^\mu = p^\nu$$

Sous forme infinitésimale on a :

$$\Lambda_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \Omega_\mu^\nu$$

avec $\Omega^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} \Omega_\mu^\nu$, $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}$

On en déduit que $\Omega^{\mu\nu}$ dépend de 3 paramètres θ , χ_1 et χ_2 , en choisissant par exemple :

$$\Omega^{12} = \theta, \quad \Omega^{31} = \chi_2, \quad \Omega^{23} = \chi_1$$

Soit $M_{\mu\nu}$ une représentation de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$.
On note :
$$\begin{cases} J_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} \\ K_i &= M_{i0} = -M_{0i} \end{cases}$$

La représentation unitaire correspondante à la transformation infinitésimale du groupe est :

$$\begin{aligned} U(\Lambda) &= 1 + \frac{i}{2} \Omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \\ &= 1 + i \theta J_3 + i \chi_1 [J_1 + (1-t) K_2] + i \chi_2 [J_2 - (1-t) K_1] \\ &= 1 + i \theta J_3 + i \chi_1 X_1 + i \chi_2 X_2 \end{aligned}$$

avec
$$\begin{cases} X_1 &= J_1 + (1-t) K_2 \\ X_2 &= J_2 - (1-t) K_1 \end{cases}$$

L'algèbre de Lie du petit groupe est donc formée par X_1 , X_2 et J_3 avec les règles de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [J_3, X_1] &= i X_2 \\ [J_3, X_2] &= -i X_1 \\ [X_1, X_2] &= i (1 - (1-t)^2) J_3 \end{cases} \quad (\text{XII.4})$$

Pour $t = 0$, on obtient l'algèbre de Lie de l'Euclidien $E(2)$, pour $t \neq 0$, celle de $\mathbb{R}(3)$.

Pour interpréter ceci comme une contraction, nous devons considérer l'algèbre $SL(2, \mathbb{C})$ dans son ensemble. Prenons alors la transformation $\Phi(t)$ suivante :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= J_1 + (1-t) K_2 \\
 X_2 &= J_2 - (1-t) K_1 \\
 Y_1 &= K_1 + (1-t) J_2 \\
 Y_2 &= K_2 - (1-t) J_1 \\
 X_3 &= J_3 \\
 Y_3 &= K_3
 \end{aligned}
 \tag{XII.5}$$

$\Phi(t)$ est une transformation régulière pour $0 \leq t \leq 1$, la limite $\Phi(0)$ est régulière, et par conséquent la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t)^{-1} [\Phi(t) e_i, \Phi(t) e_j] \quad \text{avec } e = (J, K)$$

fournit une contraction triviale de $SL(2, \mathbb{C})$: on obtient une algèbre $\Phi(0)^{-1}[\Phi(0) e_i, \Phi(0) e_j]$ isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})$. Néanmoins dans cette transformation, la sous-algèbre (X_1, X_2, J_3) passe de l'algèbre des rotations à celle de l'Euclidien.

[Incidentement on remarque sur cet exemple qu'en faisant une contraction triviale d'une algèbre, on peut obtenir une contraction non triviale d'une sous-algèbre, en faisant tourner celle-ci à l'intérieur de l'algèbre initiale. Ceci peut donc fournir une autre façon de "sauver" les représentations de sous-algèbres que celle introduite par Saletan.]

- Représentations du petit groupe contracté, correspondant à la contraction de représentations fixées de $SL(2, \mathbb{C})$

Il est commode ici d'utiliser les représentations de $SL(2, \mathbb{C})$, correspondant à un produit de deux algèbres $\mathbb{R}(3)$ en définissant dans l'algèbre complexifiée :

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= \frac{1}{2} (\vec{J} + i \vec{K}) \\
 \vec{B} &= \frac{1}{2} (\vec{J} - i \vec{K})
 \end{aligned}$$

On les note $\mathfrak{D}^{j_1, j_2}$: produit tensoriel de la représentation $\mathfrak{D}^{j_1}$ de $(\vec{A})$, et $\mathfrak{D}^{j_2}$ de $\vec{B}$.

Prenons par exemple la représentation $\mathfrak{D}^{j, 0}$. Désignons les vecteurs de base par la valeur de A_3 : $|j\rangle \dots$ On obtient par la contraction précédente une représentation de l'Euclidien correspondant à :

$$\begin{aligned} X_1(0) &= J_1 + K_2 = L_1 \\ X_2(0) &= J_2 - K_1 = L_2 \\ X_3 &= J_3 \end{aligned}$$

de la forme :

$$L_i \rightarrow \begin{pmatrix} j & j-1 & \dots & -j \\ 0 & & & \\ L_i^{j-1, j} & 0 & & \\ & L_i^{j, j-1} & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XII.6})$$

avec $\begin{cases} L_1^{j-1, j} = -i [(j+m)(j-m+1)]^{1/2} \\ L_2^{j-1, j} = [(j+m)(j-m)]^{1/2} \end{cases}$
 (soit $L_+ = L_1 + i L_2$ représenté par 0).

On obtient donc une représentation réductible de $E(2)$, et indécomposable, tout à fait analogue à ce qu'aurait donné un sauvetage de la représentation $\mathfrak{D}^j$ de $\mathbb{R}(3)$ comme nous l'avons vu dans le cas de $E(3)$.

L'intérêt de ceci vient de ce que le seul état invariant est évidemment celui correspondant à $J_3 = -j$. La représentation contient une suite de sous-espaces invariants :

$$V_{-j} \subset V_{-j+1} \subset V_{-j+2} \subset \dots \subset V_0 = V \quad (\text{espace de la représentation avec } \frac{V_{-j+p}}{V_{-j+p-1}} \approx \text{état d'hélicité } (-j + p).)$$

Notons ici un résultat analogue dans le cas du groupe de Lorentz inhomogène démontré par R. Shaw [5] : Dans le cas où la représentation $\Lambda \rightarrow Q(\Lambda)$ est la représentation $\mathfrak{D}^{(j,0)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, la représentation de masse nulle $\varphi'(p) = e^{ipa} Q(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}p)$ du groupe de Poincaré est réductible, mais indécomposable, correspondant à une suite de Jordan-Hölder du type précédent, où cette fois, le quotient de 2 sous-espaces consécutifs est une représentation unitaire, de dimension infinie, irréductible de $E(2)$, d'hélicité correspondante $(-j + p)$. On obtient donc un seul état d'hélicité invariant.

En partant d'une représentation $\mathfrak{D}^{j_1, j_2}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ on trouve de la même façon une représentation de $E(2)$ indécomposable. Elle contient une succession de sous-espaces invariants (suite de Jordan-Hölder):

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3, \subset \dots \oplus \mathfrak{M}_1 = V \text{ espace entier}$$

Le seul état irréductible invariant est $\mathfrak{M}_1$ correspondant à l'hélicité $\lambda = j_2 - j_1$.

Dans le quotient $V/\mathfrak{M}_1$, les états d'hélicité $j_2 - j_1 \pm 1$ sont invariants, etc

En général, le sous-espace $\mathfrak{M}_p$ est formé d'états d'hélicité $(p-1, p-3, \dots, -(p-1))$. Le théorème de Weinberg résulte de cette décomposition : en effet, Weinberg montre que la transformée de Fourier de la partie d'annihilation du champ contient une "fonction d'ordre" $u_n(\vec{p}, \lambda)$ qui, ramenée au moment standard $\vec{p} = (0, 0, 1)$ fournit la base

d'une représentation d'hélicité λ , (irréductible) de $E(2)$. La seule possibilité est donc $\lambda = j_2 - j_1$, à moins d'introduire des conditions supplémentaires.

Par exemple, si l'on veut décrire une particule d'hélicité 1 par un quadrivecteur, on obtient la décomposition de $D^{1/2,1/2}$ suivante : l'état stable par $E(2)$ est celui d'hélicité nulle et les états $\lambda = \pm 1$ ne sont stables sous l'action de l'Euclidien, que modulo le sous-espace précédent. On pourrait montrer que ceci correspond à l'invariance de jauge [S].

Généralisation de la contraction :

La définition précédente de la contraction ne permet pas de comprendre le processus pourtant usuellement employé pour contracter les représentations d'un groupe semi-simple sur le produit semi-direct "correspondant", procédé dû à Inonü et Wigner [I.W],[I]. Prenons l'exemple de la contraction de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $E(3)$. Les représentations unitaires de $SL(2, \mathbb{C})$ sont caractérisées par un nombre discret j_0 et un paramètre $i\lambda$ où λ est réel. Elles se décomposent suivant les rotations en :

$$\bigoplus_{j=j_0}^{\infty} D(j) \quad \text{chaque } D(j) \text{ étant de multiplicité } 1.$$

La contraction de l'algèbre de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ sur $E(3)$ est la contraction d'Inonü-Wigner, avec $u_t = 1$ sur les rotations, $u_t = t$ sur le reste. Le procédé "usuel" pour contracter les représentations "autour des rotations" est le suivant :

$$\varphi'_{j_0, \lambda'}(X_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{j_0, \lambda'} / t (u_t X_i) \quad (\text{XII.7})$$

La limite précédente étant prise en fait pour chaque élément de matrice séparément. Ainsi, par exemple :

$$\varphi'_{j_0, \lambda'}(J_i) = \varphi_{j_0, \lambda}(J_i)$$

Cette manière de procéder ne peut pas rentrer dans la définition que nous avons donnée plus haut : en effet pour chaque valeur du paramètre t , les représentations considérées sont inéquivalentes. Réciproquement, la représentation à laquelle on arrive, soit $\varphi'_{j_0, \lambda'}$ de l'Euclidien, se déforme non dans une orbite particulière, mais transversalement à une famille d'orbites caractérisées par un paramètre continu λ . Nous sommes donc conduits, pour tenir compte de ce phénomène, à généraliser la notion de contraction d'une façon qui complète son lien réciproque avec la déformation.

Revenons pour cela au cas des algèbres de Lie seules.

Définition : contraction d'une famille d'orbites d'algèbres de Lie dépendant d'un paramètre λ .

L'algèbre μ' sera dite contractée d'une famille d'algèbres caractérisée par un paramètre λ , s'il existe un chemin à travers cette famille, d'extrémité μ' . Plus précisément, soit $\mu_\lambda(x, y)$ une algèbre appartenant à une famille d'orbites $\theta(\lambda)$ sur L_n , alors, s'il existe $U_\lambda \in GL(V)$ pour $\lambda \neq 0$, et pouvant être singulière si $\lambda = 0$, telle que :

$$\mu'(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda^{-1} \mu_\lambda (U_\lambda x, U_\lambda y)$$

μ' est contractée de la famille $\{\mu_\lambda\}$.

La contraction sera dite triviale si μ' appartient encore à la famille μ_λ .

Exemple : Considérons la famille $A_5(\lambda)$ dans le cas des algèbres de dimension 3; nous allons montrer que les algèbres A_6 et A_7 sont des contractions au sens précédent.

Tout d'abord, A_6 et A_7 ne sont pas des contractions d'une algèbre $A_5(\lambda)$ comme on peut le vérifier directement d'après le Chapitre VII.

Prenons comme famille représentative de $A_5(\lambda)$:

$$\mu_\lambda \begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = e_2 + e_1 \\ [e_3, e_1] = -e_1 + \lambda e_2 \end{cases} \quad \text{et de } A_7 \text{ ou } A_6: \mu_7 \begin{cases} [e_1, e_2] = 0 \\ [e_2, e_3] = e_1 \\ [e_3, e_1] = \frac{1}{\lambda} e_2 \end{cases}$$

Pour contracter sur A_7 il suffit de prendre, avec $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} U_\lambda(e_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_1 \\ U_\lambda(e_2) = e_2 \\ U_\lambda(e_3) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_3 \end{cases}$$

alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} U_\lambda^{-1} \mu_\lambda (U_\lambda e_i, U_\lambda e_j) = \mu_7(e_i, e_j)$$

de l'autre côté, pour $\lambda < 0$,

$$\text{avec } \begin{cases} U_\lambda(e_1) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e_1 \\ U_\lambda(e_2) = e_2 \\ U_\lambda(e_3) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e_3 \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} U_\lambda^{-1} \mu_\lambda (U_\lambda e_i, U_\lambda e_j) = \mu_6(e_i, e_j)$$

Représentation géométrique de $\overline{U_\lambda(A_5(\lambda))}$, c'est-à-dire de l'adhérence de la famille $A_5(\lambda)$.

Nous avons vu que l'ensemble des algèbres non semi-simples de dim 3 étaient caractérisées par des matrices.[VII]

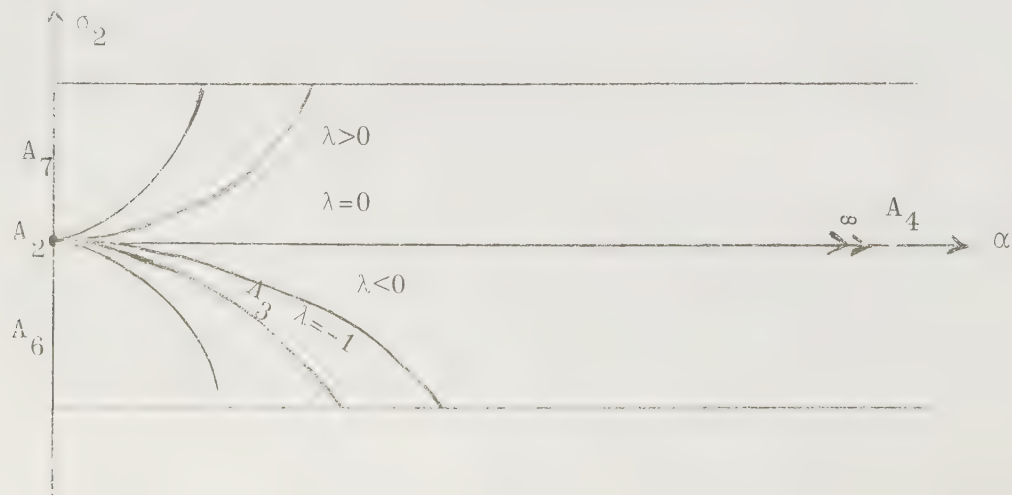
$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille $A_5(\lambda)$ correspond à toutes les matrices telles que $\sigma_1 \sigma_2 = \lambda \alpha^2$, $\lambda \neq 0$ (en comprenant $A_3 = A_5(-1)$). Les algèbres A_6 et

A_7 correspondent à $R_6 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ soit $\lambda = \mp \infty$,

A_4 correspond à $\lambda = 0$, et s'obtient en contractant $A_5(0)$. Enfin A_2 pourrait être obtenu en contractant chaque $A_5(\lambda)$, A_6 , ou A_7 .

Plaçons-nous dans un plan $\sigma_1 = \text{cte} = 1$, d'axes σ_2 et α les différents orbites se représentent ainsi. On peut passer de $\begin{pmatrix} \sigma_1 & \alpha \\ \alpha & \sigma_2 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \sigma_2 & \alpha \\ -\alpha & \sigma_1 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc, il suffit de se limiter à $\sigma_2 \leq \sigma_1$. On peut également changer le signe de α , donc il suffit de se limiter à $\alpha \geq 0$. Finalement, on a la représentation suivante :



De la même façon, considérons une famille de représentations dépendant d'un paramètre λ , alors on appellera contraction de la famille de représentations, la limite suivante, quand elle existe :

$$\lim_{\lambda} A_{\lambda}^{-1} \varphi_{\lambda}(T_{\lambda} x) A_{\lambda} = \varphi'(x)$$

associée à la contraction par T_{λ} de l'algèbre. Ainsi dans l'exemple précédent de la contraction de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $E(3)$, la famille de représentation est caractérisée par l'indice entier ou 1/2 entier j_0 qui est fixe, et le paramètre réel λ . Et la contraction d'Inonü-Wigner (XII.7) est bien du type précédent.

Remarque : Nous avons choisi de contracter ainsi $SL(2, \mathbb{C})$ sur $E(3)$, et non les rotations $R(4)$ sur $E(3)$ comme on le fait habituellement, car le 2ème cas ne rentre pas dans la définition précédente.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à des exemples de déformations simultanées d'algèbres et de représentations qui interviennent en physique. Il ne s'agit que de déformations au premier ordre, parce que ce sont les seules susceptibles d'un traitement systématique, mais nous verrons qu'elle recouvrent pratiquement l'ensemble des représentations déformées possibles.

Le chapitre XIII reprend un article (fait en collaboration avec R. Sénéor), où nous étudions en particulier les déformations de représentations correspondant à une déformation de l'algèbre du groupe de Poincaré dans l'algèbre $O(4,1)$. Dans la 3ème partie, on appliquera le résultat obtenu ici sur le groupe $H^1(\mu, L(V))$ à la recherche d'un spectre de masse par déformation.

Le chapitre suivant montre comment les réalisations d'algèbres de Lie par des opérateurs différentiels sur un espace de fonctions analytiques se prêtent à une déformation particulière, qui a l'avantage de pouvoir être complètement classée par un groupe de cohomologie de dimension finie.

XIII - FIRST ORDER DEFORMATIONS OF LIE ALGEBRA
REPRESENTATIONS, $E(3)$ AND POINCARÉ EXAMPLES

Commun. Math. Phys. 9, 242-266 (1968)

Abstract. A classification of “first order” deformations of Lie algebra representations by the use of a cohomology group is studied. A method is proposed for calculating this group for the case of algebras which are semi-direct products. The role of unitarity of the representations is exhibited. Applications are made for the Poincaré and $E(3)$ algebras.

Up to now, only the “first order” deformations of Lie algebra representations (connected or not with a deformation of the Lie algebra itself), seem to allow some possibilities of classification.

We recall in part I, how this is achieved by the introduction of a cohomology group $H^1(\mathcal{G}, L(V))$ where V is the (possibly infinite-dimensional) representation space. When $\mathcal{G}$ is a semi-direct product $K.T$ of a semi-simple and compact algebra K by an abelian ideal T , a general method can be used to determine this group H^1 .

The procedure is exposed in part II; it is nearly the same as that which may be used for the computation of the finite dimensional representations of such algebras [1]. The application to the motion algebra $E(3)$ is straightforward, if one considers only the deformations leaving the rotation subalgebra and its representation fixed. For the Poincaré algebra we shall see, using the “Lorentz basis” that the same method can be applied (even with a non compact K).

In all the cases, we do not claim that the method used here is completely rigorous for the infinite dimensional representations — since topological questions should be discussed in that case — nevertheless we think it has at least an heuristic value.

Our main result is that the dimension of various interesting cohomology groups $H^1(\mathcal{G}, L(V))$, restricted in order to produce unitary deformations, is one on R . This is true for $SL(2, R)$, V being a representation space for the continuous series, for $E(3)$ and the Poincaré algebras, with the representations $[m, s]$, $m > 0$. It results for instance in the Poincaré case that a deformation of such a representation $[m, s]$, $m > 0$ with a fixed algebra can always change the mass, the spin being “rigid”.

It results also that a "first order" deformation of the representation associated to a deformation of the algebra¹ (Poincaré → De Sitter etc.) has always the general form:

$$\begin{aligned}\varphi_t(K_i) &= \varphi_0(K_i); & K_i \in K \\ \varphi_t(T_i) &= \varphi_0(T_i) + t[A, \varphi_0(T_i)] & \text{for } T_i \in T\end{aligned}$$

of which the "Gell-Mann formula" is a particular example (and even the only "rational" example).

Some remarks about the deformations of the representations have been formulated in [2] (whose notations will be used here), and also in various articles of HERMANN [3]. For the deformation of the algebras alone, we refer to [4, 5, 6], and for the main cohomological definitions and results to [7] and [8].

I. Some Generalities

1. Lie Algebras Deformations

Let $\mathcal{G} = ([\], V)$ be a Lie algebra, V its underlying vector space, and $[\]$, the Lie algebra law.

A deformation of $\mathcal{G}$ is a family of Lie algebras defined on the same space V , but with a law depending of a parameter t : $\mathcal{G}_t = ([\]_t, V)$ and such that:

$$\mathcal{G}_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathcal{G}.$$

We always assume that it is possible to expand it, at least in some neighbourhood of $t = 0$:

$$[x, y]_t = [x, y] + tF_1(x, y) + t^2F_2(x, y) + \dots \quad x, y \in V. \quad (1.1)$$

The functions F_i have to be antisymmetric, and to verify a set of relations in order to satisfy the Jacobi condition. [These "integrability conditions" can be interpreted geometrically and can be expressed by an element of $H^3(\mathcal{G}, \mathcal{G})$.]

2. Deformations of Representations

Let φ be a representation of $\mathcal{G}$. φ is an homomorphism of $\mathcal{G}$ into a space $L(W)$. (One says also that W is a $\mathcal{G}$ -module.) A deformation φ_t of φ , associated with a deformation $\mathcal{G}_t$ of $\mathcal{G}$, is a family of maps: $V \rightarrow L(W)$ such that:

$$\varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi, \quad (1.2)$$

$$\forall t, \forall x, y \in V : \varphi_t([x, y]_t) = [\varphi_t(x), \varphi_t(y)]_{L(W)}. \quad (1.3)$$

We shall also assume that the following expansion is valid:

$$\varphi_t(x) = \varphi(x) + t\varphi_1(x) + t^2\varphi_2(x) + \dots \quad (1.4)$$

A deformation is said of the first order if $\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = 0$.

¹ Without "first order" term: F_1 . Ex: $[P'_\mu, P'_\nu] = \pm i t^2 L'_{\mu\nu}$ and $L'_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}$.

Through (1.3), the functions φ_i and F_i have to satisfy a set of conditions:

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q=0,\dots,n}} \varphi_p(F_q(x, y)) = \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s=0,\dots,n}} [\varphi_r(x), \varphi_s(y)]. \quad (1.5)$$

These "integrability conditions" can also be interpreted in different ways — in particular they are linked to the group $H^2(\mathcal{G}, L(W))$. In the following we shall restrict ourselves to the *first order condition* ($n = 1$):

$$\varphi_0(F_1(x, y)) = [\varphi_1(x), \varphi(y)] + [\varphi(x), \varphi_1(y)] - \varphi_1[x, y]. \quad (1.6)$$

3. Equivalence of two Sets $(\mathcal{G}_t, \varphi_t)$ and $(\mathcal{G}'_t, \varphi'_t)$ [2]

Let $(\mathcal{G}_t, \varphi_t), (\mathcal{G}'_t, \varphi'_t)$ be two deformations of the same algebra $\mathcal{G}$ and representation φ .

We shall say they are equivalent if there exist a couple (T_t, A_t) belonging to $(GL(V), GL(W))$ such that:

$$\begin{cases} T_t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n; & A_t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n A_n \\ A_t^{-1} \varphi_t(T_t x) A_t = \varphi'_t(x) \quad \forall x \in V. \end{cases} \quad (1.7)$$

In the particular case $T_0 = A_0 = 1$, the condition (1.7) gives at the first order in t :

$$\varphi'_1(x) - \varphi_1(x) = \varphi_0(T_1 x) + [\varphi_0(x), A_1]. \quad (1.8)$$

4. Definition of $H^1(\mathcal{G}, L(W))$

W being a representation space for $\mathcal{G}$, there is a canonical way to put a $\mathcal{G}$ -module structure onto the space $L(W)$, i. e. to define an action of $\mathcal{G}$ into $L(W)$:

for $A \in L(W), x \in \mathcal{G}$, let $x.A$ be the element of $L(W)$ defined by:

$$x.A = [\varphi(x), A]_{L(W)}. \quad (1.9)$$

$Z^1(\mathcal{G}, L(W))$: the 1-cocycle-elements of $Z^1(\mathcal{G}, L(W))$ are the functions ψ of $\mathcal{G}$ into $L(W)$ satisfying the condition:

$$\delta \psi(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{G}$$

$\delta \psi$ being defined by the general formula:

$$\delta \psi(x, y) = x. \psi(y) - y. \psi(x) - \psi([x, y]) \quad (1.10)$$

or more explicitly, using the definition of $x.A$ in our case (see 1.9):

$$\delta \psi(x, y) = [\varphi(x), \psi(y)] - [\varphi(y), \psi(x)] - \psi([x, y]). \quad (1.11)$$

$B^1(\mathcal{G}, L(W))$: the coboundaries are the functions $\psi: \mathcal{G} \rightarrow L(W)$ which may be put under the form:

$$\psi(x) = x.A \quad (= \delta A(x) \text{ by definition}). \quad (1.12)$$

Here, this means:

$$\psi(x) = [\varphi(x), A].$$

Using the Jacobi identity, it is easy to verify the inclusion $B^1 \subset Z^1$.

The group $H^1(\mathcal{G}, L(W))$ is the quotient space: $Z^1(\mathcal{G}, L(W))/B^1(\mathcal{G}, L(W))$.

5. Occurrence of $H^1(\mathcal{G}, L(W))$ in the Deformations of Representations

Let us first notice that the conditions (1.6) and (1.8) can now be written:

$$\varphi(F_1(x, y)) = \delta \varphi_1(x, y), \quad (1.6')$$

$$\varphi'_1(x) - \varphi_1(x) = \varphi(T_1 x) + \delta A_1(x). \quad (1.8')$$

a) Fixed Algebra Case

If one considers only the deformations of the representations of a given Lie algebra, it means that all the F_i ($i \neq 0$) defined in (1.1) are zero, and the condition on φ_1 is, from (1.6'):

$$\delta \varphi_1(x, y) = 0, \quad \text{i. e.} \quad \varphi_1 \in Z^1(\mathcal{G}, L(W)). \quad (1.6'')$$

The equivalence of two deformations φ_t and φ'_t becomes now the usual equivalence of two representations; since with $T_t = 1$ the Eq. (1.7) is: $A_t^{-1} \varphi_t(x) A_t = \varphi'_t(x)$, and at the first order, one gets:

$$\varphi'_1(x) - \varphi_1(x) = \delta A_1(x), \quad \text{i. e.} \quad \varphi'_1 - \varphi_1 \in B^1(\mathcal{G}, L(W)). \quad (1.8'')$$

Then the elements φ_1 leading to inequivalent deformations of φ have to belong to $H^1(\mathcal{G}, L(W))$.

In particular, one knows that if $H^1(\mathcal{G}, L(W)) = 0$, the representation φ is rigid: all deformations are equivalent to the initial representation.

b) Particular Lie Algebras Deformation

In the particular case $F_1 = 0$, (but F_2 etc. $\neq 0$), φ_1 is always a cocycle. It is the usual way of deforming the Poincaré algebra into the De Sitter algebras. However in that case, the representation is not in general rigid even with $H^1(\mathcal{G}, L(W)) = 0$, or more generally a coboundary does not give necessarily a deformation equivalent to the initial one (see 1.8'). An example is the "Gell-Mann Formula".

c) Deformation with a Given Lie Algebra

Let us assume that one has constructed two deformed representations φ_t and φ'_t , associated with the same Lie algebra deformation $\mathcal{G}_t$, and let us assume also that: $\varphi_t = \varphi'_t \pmod{t^n}$, i. e. the two deformations

are different only by terms of order $\geq n$. Then $\varphi'_n - \varphi_n$ is a cocycle. Moreover if $\varphi'_n - \varphi_n$ is a coboundary, then the difference between φ_i and φ'_i can be rejected to the next order.

The first part is a consequence of the conditions (1.5) which can be written: $\delta\varphi_n = \Sigma$ terms involving F_i, F_n , and φ_i for $i < n$. For the second part: if $(\varphi'_n - \varphi_n)(x) = [\varphi(x), A]$, let us define $A_i = e^{i^n A}$, then φ'_i and $A_i \varphi_i A_i^{-1}$ are identical modula t^{n+1} .

6. The Semi-Simple Lie Algebras. One Example

With the definition of equivalence given in I — 3, it is easy to prove the following result [2]:

If G is a Lie algebra such that $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = 0$ and $H^1(\mathcal{G}, L(W)) = 0$ for some representation φ into a space W , then all the deformations $(\mathcal{G}_t, \varphi_t)$ of $(\mathcal{G}, \varphi)$ are equivalent to the initial set $(\mathcal{G}, \varphi)$.

This is the situation for a semi-simple Lie algebra, and a finite dimensional representation space W . Let us now show on one example, that it is no longer the case when W is an infinite dimensional space.

Let us consider the deformation of $SL(2, R)$ representations, the algebra being fixed.

HERMANN has proved that the discrete representation of $SL(2, R)$ is rigid (a result in agreement with the intuitive picture) [3]. With the restriction of making always a deformation into the *unitary* representations, a direct computation of H^1 for the continuous series (relative to the compact generator J_3), gives that:

$$H^1(SL(2, R), J_3, L(W))$$

is a one dimensional space on R .

(The notation means that we require $\varphi_1(J_3) = 0$).

This proves that the continuous series can be deformed with J_3 fixed, in essentially one direction (infinitesimally), as it can be also expected from a geometrical point of view. (Details are given in appendix A.)

II. Determination of $H^1(\mathcal{G}, L(V))$

In view of the application to the Euclidian and Poincaré algebras, we shall first give a general way of constructing the group H^1 , when the algebra is a semi-direct product $K.T$.

The procedure is suitable when K is compact, or in a non-compact case, when the representation is finite-dimensional. However, we shall see that it applies also to the Poincaré case with an infinite dimensional representation.

G being of the form $K.T$ with K semi-simple, and T abelian, we denote by X the elements of T , and Y those of K .

Let us call V the representation space, and φ_0 the representation of $\mathcal{G}$. $L(V)$ has the $\mathcal{G}$ -module structure given by (1-9).

When V is a finite-dimensional space, the Serre-Hochschild theorem [9] simplifies the task, in particular by restricting the problem to the K -relative cohomology. (Since it gives $H^1(\mathcal{G}, L(V)) \cong H^1(T, L(V))^K$. However, in the simple case of H^1 , it is easy to give a direct proof of that result.

Let φ be a one-cochain: $\varphi \in L(\mathcal{G}, L(V))$. The restrictions of φ respectively to T and K are denoted by φ_T and φ_K . From the condition of cocycle (1.10), one gets:

$$\begin{aligned} \varphi_K &\in Z^1(K, L(V)) \\ \varphi_T &\in Z^1(T, L(V)) \\ Y \cdot \varphi_T(X) - X \cdot \varphi_K(Y) &= \varphi_T([Y, X]) \quad \begin{cases} X \in T \\ Y \in K \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

using the notations defined by (1.9).

K being semi-simple, $H^1(K, L(V)) = 0$, and φ_K is also a coboundary:

$$\exists A \in L(V) \text{ such that } \varphi_K(Y) = Y \cdot A (= [\varphi_0(Y), A] = \delta A(Y)).$$

Now the map $\dot{\varphi} = \varphi - \delta A$ belongs to the same cohomology class than φ , and verifies:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \dot{\varphi}_K(Y) = 0 \quad \forall Y \in K \\ \text{b)} \quad & \dot{\varphi}_T \in Z^1(T, L(V)) \\ \text{c)} \quad & Y \cdot \dot{\varphi}_T(X) = \dot{\varphi}_T([Y, X]) \end{aligned} \quad (2.2)$$

[always with the notation (1.9)].

The two last conditions mean exactly that: $\dot{\varphi}_T \in H^1(T, L(V))^K$, (which is the Serre-Hochschild theorem).

Let us examine now the restrictions resulting from the two last conditions. In the following, we shall use the notation φ instead of φ_T , φ_0 being always the representation of $\mathcal{G}$.

Condition c). We proceed in the same way as in [1]. Let us emphasize here that there is nothing more than the usual Wigner-Eckart theorem; in fact the principle is the following: by (c) $\varphi(X)$ is transforming under the subgroup K exactly like the representation $\varphi_0(X)$ itself, hence it is clear that $\varphi(X)$ can allow transitions only between some given representations of K .

Let us formulate it like in [1]:

T is a K -module for the adjoint representation, we assume that it is a simple module D^α (it is the case for $E(3)$ where $T \cong D^1$ and for the Poincaré algebra where $T \cong D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$).

V is a K -module: by restricting the representation φ to K .

First we add the following supplementary assumptions:

- K is compact, and φ is a unitary representation
- or — K is non compact, and φ is a finite-dimensional representation.

In both cases, the following decomposition is valid:

$$V = \bigoplus_i D^i \quad \dim D^i < \infty,$$

D^i being an irreducible representation of K . (It comes from the semi-simplicity of K in the second case).

We restrict ourselves to cases of multiplicity one for each D^i which occurs in the decomposition. (The general case can be also considered, according to [1], but with some more complicated notations, and we do not need it in our examples).

T and V being K -module, $L(V)$ is a K -module and therefore the space $L(T, L(V))$ has a canonical structure of K -module, defined by

$$\begin{aligned} \psi \in L(T, L(V)) \\ Y \in K \end{aligned} \rightarrow Y \cdot \psi \in L(T, L(V)) \quad (2.3)$$

where

$$(Y \cdot \psi)(X) = Y \cdot \psi(X) - \psi([Y, X]) \quad \begin{aligned} X \in T \\ Y \in K. \end{aligned}$$

Elements ψ such that $Y \cdot \psi = 0$ are said K -invariants. The space of invariant elements is denoted by [7]:

$$L(T, L(V))^K$$

with these notations, the condition (c) can be read now:

$$\varphi \in L(T, L(V))^K. \quad (2.4)$$

Using the canonical isomorphisms:

$$L(V) \cong \tilde{V}^* \otimes V = \bigoplus_{i,j} (D^i{}^* \otimes D^j).$$

The map $\varphi(T) \in L(V)$ can be decomposed into blocks $\varphi^{ji}(T) \in L(D^i, D^j)$ giving transitions between D^i and D^j , and from (2.4):

$$\varphi^{ji} \in (D^{\alpha}{}^* \otimes D^i{}^* \otimes D^j)^K. \quad (2.5)$$

Here the K -invariance means: projection of the product onto the trivial representation D^0 of K . Using again the canonical isomorphisms, one gets:

$$\varphi(X_e) e_m^i = \sum_{j, m'} \varphi_{em'}^{ji} e_{m'}^j,$$

where e_m^i is a basis of D^i , and $X_e \in D^\alpha = T$. In other words, the φ^{ji} are simply the Clebsch-Gordan coefficients used in the coupling of $D^\alpha \otimes D^i$ and D^j .

In the particular case of the $E(3)$ and Poincaré algebras, the multiplicities of the representations appearing in the product decomposition is always one. When such a situation is realized, the space defined by

(2.5) is one dimensional. But we already know an element of (2.5): the initial representation φ_0 , restricted to T , obviously satisfies the conditions (c) and (b).

Hence, with the above assumption over the product decomposition, it results that:

$$\varphi^{ji} = C^{ji} \varphi_0^{ji}, \quad (2.6)$$

where C^{ji} is an arbitrary constant depending only on the representations D^i and D^j .

Restrictions on the coefficients C^{ji} come from the condition (2.2) b. Condition b). It is the condition: $\varphi \in Z^1(T, L(V))$, i. e.

$$X \cdot \varphi(X') = X' \cdot \varphi(X) \quad \left[\begin{array}{l} \text{with the notation (1.9), or:} \\ [\varphi_0(X), \varphi(X')] = [\varphi_0(X'), \varphi(X)] \end{array} \right].$$

Let us "translate" first this condition in a language very similar to the preceeding one.

For an arbitrary $\psi \in L(T, L(V))$ let us define the antisymmetric bilinear form, $B \in L(T \wedge T, L(V))$:

$$B(X, X') = X \cdot \psi(X') - X' \cdot \psi(X). \quad (2.6)$$

Notation (1.9).

There is also a canonical K -module structure on the space $L(T \wedge T, L(V))$, it is defined by:

$$Y \in K \rightarrow Y \cdot B \in L(T \wedge T, L(V))$$

with:

$$(Y \cdot B)(X, X') = Y \cdot B(X, X') - B([Y, X], X') - B(X, [Y, X']) \quad (2.7)$$

B being any antisymmetric bilinear form.

For the particular form of B defined by (2.6), it is a simple consequence of the Jacobi identity, that:

$$Y \cdot B = 0$$

which can be noted, as before:

$$B \in L(T \wedge T, L(V))^K. \quad (2.8)$$

We have also a decomposition:

$$L(T \wedge T, L(V))^K = \bigoplus_{i,j} L(T \wedge T, L(D^i, D^j))^K. \quad (2.9)$$

Let us call Σ^{ij} the finite-dimensional space $L(T \wedge T, L(D^i, D^j))^K$. A particular element of Σ^{ij} is furnished by the representation itself:

$$\begin{aligned} B_0^{jki}(X, X') &= \varphi_0^{jk}(X) \varphi_0^{ki}(X') - \varphi_0^{jk}(X') \varphi_0^{ki}(X). \\ B_0^{jki} &\in \Sigma^{ij} \end{aligned} \quad (2.10)$$

These forms are not independant; according to the commutation relation of φ_0 , one has:

$$\sum_k B_0^{jki} = 0 \quad \forall i, j \quad (2.11)$$

Coming back to the condition (b), we write it now in more details between two spaces D^i and D^j :

$$[\varphi_0(X), \varphi(X')]^{j,i} = [\varphi_0(X'), \varphi(X)]^{j,i} = 0 \quad \forall X, X' \in T.$$

Introducing the relation (2.6):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k [C^{k,i} \varphi_0^{j,k}(X) \varphi_0^{k,i}(X') - C^{i,k} \varphi_0^{j,k}(X') \varphi_0^{k,i}(X)] \\ &\quad - \sum_k [C^{k,i} \varphi_0^{j,k}(X') \varphi_0^{k,i}(X) - C^{i,k} \varphi_0^{j,k}(X) \varphi_0^{k,i}(X')] \end{aligned}$$

or:

$$\sum_k (C^{j,k} + C^{k,i}) B_0^{jki}(X, X') = 0 \quad \forall X, X' \in T. \quad (2.12)$$

To sum up, the following relations result from (b):

$$\begin{aligned} \sum_k (C^{j,k} + C^{k,i}) B_0^{jki} &= 0 \\ \sum_k B_0^{jki} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

where B_0^{jki} is defined by (2.10).

The space $Z^1(\mathcal{G}, L(V))$ is determined by the functions $\varphi \in L(\mathcal{G}, L(V))$ satisfying (2.6) and (2.13).

$B^1(\mathcal{G}, L(V))$. A coboundary is a linear function φ of $\mathcal{G}$ into $L(V)$, such that $\varphi(X) = \delta A(X) = [\varphi_0(X), A]$ for some $A \in L(V)$.

We are only considering the K -relative cohomology. Hence φ is zero on K . Thus A has to commute with K . The matrix blocks A^{ji} are then of the form: $A^{ji} = \mu^i \delta^{ji}$, and the general form of a coboundary is:

$$\varphi^{ji} = (\mu^i - \mu^j) \varphi_0^{ji}. \quad (2.14)$$

III. Some Examples

1. Euclidian Group $E_3 = T_3 \times SO(3)$

The algebra is formed by 6 generators:

$$H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3.$$

H_i are the generators of the rotation subalgebra. We have also:

$$\begin{aligned} [H_+, F_+] &= [H_-, F_-] = [H_3, F_3] = 0 \\ [H_+, F_-] &= -[H_-, F_+] = 2F_3 \\ [H_+, F_3] &= -F_+, \quad [H_-, F_3] = F_-, \quad [F_-, H_3] = -F_+, \\ [F_+, H_3] &= F_-. \end{aligned}$$

and the F generators commute.

$$\text{The representations space is } V = \bigoplus_{j=j_0}^{\infty} D^j.$$

We want to compute the group $H^1(E_3, L(V))$, the E_3 representation on V being given by the following action (with the notation $\varphi_0(X) = X$):

$$\begin{aligned}
H_3 \xi_{jm} &= m \xi_{jm}, \\
H_- \xi_{jm} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \xi_{j,m-1}, \\
H_+ \xi_{jm} &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \xi_{j,m+1}, \\
F_3 \xi_{jm} &= C_j \sqrt{j^2 - m^2} \xi_{j-1,m} - A_j m \xi_{j,m} \\
&\quad - C_{j+1} \sqrt{(j+1)^2 - m^2} \xi_{j+1,m}, \\
F_+ \xi_{j,m} &= C_j \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \xi_{j-1,m+1} \\
&\quad - A_j \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \xi_{j,m+1} \\
&\quad + C_{j+1} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \xi_{j+1,m+1}, \\
F_- \xi_{j,m} &= -C_j \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \xi_{j-1,m-1} \\
&\quad - A_j \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \xi_{j,m-1} \\
&\quad - C_{j+1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \xi_{j+1,m-1},
\end{aligned}$$

with

$$A_j = \frac{a}{j(j+1)} \quad C_j = \frac{b}{j} \sqrt{\frac{j^2 - j_0^2}{4j^2 - 1}}, \quad b = \frac{\varepsilon i a}{j_0}$$

and a is a real number.

(This representation is easily obtained by contraction of the representations of $SL(2, C)$ given in Gelfand-Minlos-Shapiro).

a) "Unrestricted" $H^1(E_3, SO(3), L(V))$

We shall consider the deformation "around" the rotation part: i. e. leaving fixed the representation of $SO(3)$. It corresponds to a computation of a $SO(3)$ relative cohomology group, denoted by $H^1(E_3, SO(3), L(V))$ (its elements are required to be zero on $SO(3)$). From (II) (2.1), it is the general situation when V is a finite dimensional space. By "unrestrictive cohomology" we want to emphasize that there is no supplementary conditions on the cochains. In particular, we do not make any condition of unitarity in that part. The deformation obtained with this elements of H^1 can lead to non-unitary representations.

Let φ be an element of $H^1(E_3, SO(3), L(V))$. We have

$$\varphi(H_+) = \varphi(H_-) = \varphi(H_3) = 0.$$

1) From condition (2.6), we have only 3 constants to introduce; it is convenient to choose the following ones

$$\begin{aligned}
\varphi^{j-1,j} &= \frac{\alpha_j}{C_j} \varphi_0^{j-1,j} \\
\varphi^{j,j} &= -\frac{\beta_j}{A_j} \varphi_0^{j,j} \\
\varphi^{j+1,j} &= -\frac{\gamma_j}{C_{j+1}} \varphi_0^{j+1,j}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

For example, one has:

$$\begin{aligned} \varphi(F_3) \xi_{j,m} &= \alpha_j \sqrt{j^2 - m^2} \xi_{j-1,m} + \beta_j m \xi_{j,m} \\ &\quad + \gamma_j \sqrt{(j+1)^2 - m^2} \xi_{j+1,m}. \end{aligned}$$

2) Let us write explicitly the condition (2.2) c in that case:

$$\begin{aligned} 2' \quad & (\beta_j C_{j+1} + A_j \gamma_j) j = (\gamma_j A_{j+1} + C_{j+1} \beta_{j+1}) (j+2) \\ 2'' \quad & (\alpha_j A_{j-1} - C_j \beta_{j-1}) (j-1) = (A_j \alpha_j - \beta_j C_j) (j+1) \\ 2''' \quad & (\gamma_{j-1} C_j - C_j \alpha_j) (2j-1) = 2 \beta_j A_j + (\gamma_j C_{j+1} - C_{j+1} \alpha_{j+1}) (2j+3). \end{aligned} \quad (3.2)$$

From

$$A_j j = A_{j+1} (j+2),$$

2' and 2'' give

$$\beta_j j = \beta_{j+1} (j+2),$$

therefore

$$\beta_j = \frac{\varrho}{j(j+1)}$$

ϱ is a constant (possibly complex).

With $r_j = \gamma_{j-1} - \alpha_j$ we are left to solve

$$(2j+1) C_j r_j = \frac{2\varrho a}{j^2(j+1)^2} + (2j+3) C_{j+1} r_{j+1},$$

with

$$C_j r_j (2j-1) (2j+1) = \sigma_j,$$

we get

$$\sigma_j = \frac{2\varrho a (2j+1)}{j^2(j+1)^2} + \sigma_{j+1}$$

or

$$\sigma_j - \frac{2\varrho a}{j^2} = C^{\text{te}} = C,$$

thus

$$r_j = \frac{j}{b} \frac{1}{j(4j^2-1)(j^2-j_0^2)} \left(C + \frac{2\varrho a}{j^2} \right) = \gamma_{j-1} - \alpha_j. \quad (3.3)$$

Thus the general solution of the system is

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{\varrho}{j(j+1)} = -\lambda A_j \quad \text{with} \quad -\lambda a = \varrho \\ \gamma_{j-1} &= -\lambda C_j + k_j \\ \alpha_j &= \lambda C_j + k'_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

with $k_j - k'_j = r_j + 2\lambda C_j$.

A coboundary is:

$\delta A(x) = [A, \varphi(x)]$ and because we work with a K -relative cohomology, (here $SO(3)$). A must commute with the H generators, i. e. A has the form

$$A \xi_{j,m} = \mu_j \xi_{j,m}. \quad (3.5)$$

Therefore for F operators:

$$[A, \varphi_0(F)] = (\mu_{j-1} - \mu_j) C_j [] \xi_{j-1, m'} - (\mu_{j+1} - \mu_j) C_{j+1} [] \xi_{j+1, m'} \quad (3.6)$$

(where we have omitted the explicit expression of the rotation Clebsh-Gordan coefficients). From the existence of a lower dimension space D^j in V , we have to ask that:

$$\alpha_{j_0} = \gamma_{j_0-2} = 0$$

or:

$$r_{j_0} = 0.$$

The only solution for the constant C (independant of j) is:

$$C = -\frac{1}{j_0^2}. \text{ Then } r_j = \frac{2\varrho a}{b} j \sqrt{\frac{j^2 - j_0^2}{4j^2 - 1}} = -2\lambda C_j \left(\text{with } \lambda = -\frac{\varrho}{a} \right).$$

From (3.4):

$$\alpha_j = \lambda C_j + k_j$$

$$\gamma_{j-1} = -\lambda C_j + k_j.$$

Now, we will show that k_j is a matrix element of a coboundary i. e. from (3.6) we look for arbitrary complex numbers μ_j such that:

$$\begin{cases} (\mu_{j-1} - \mu_j) C_j = k_j \\ -(\mu_{j+1} - \mu_j) C_{j+1} = k_{j+1}. \end{cases}$$

A solution is:

$$\left. \begin{aligned} \mu_j &= -\sum_{j_0+1}^j \frac{k_j}{C_j} \\ \mu_{j_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

We have thus shown that:

$$\varphi(F) = \lambda \varphi_0(F) + [A, \varphi_0(F)] \quad (3.8)$$

where λ is a complex number, A an operator defined by (3.7) and (3.5), or equivalently:

$$\dim H^1(E_3, SO(3), L(V)) = 1 \quad \text{on } \mathbb{C}.$$

($SO(3)$ means we consider only the $SO(3)$ relative cohomology: it corresponds to leave $SO(3)$ fixed during the deformation).

b) *Restricted* $H^1(E_3, SO(3), L(V))$

To consider the deformation of $E(3)$ representations into unitary representations of the group (i. e. with hermitic operators $\varphi(F)$) ($F_3 = F_3^+$, $(F^+)^+ = F^-$), we are led to introduce some restrictions on the $\varphi(F)$. They are:

$$\alpha_j = \bar{\gamma}_{j-1}, \quad (3.9)$$

$$\beta_j = \bar{\beta}_j. \quad (3.10)$$

From (3.10), one gets that ϱ is a real number. (See (3.4)) and from (3.9), since C_j is pure imaginary, and λ real, that k_j has to be real. (The (μ_j) are then pure imaginary). Introducing these restrictions in the preceding results, one gets:

$$\dim H_r^1(E_3, SO(3), L(V)) = 1 \quad \text{on } \mathbb{R} \quad (r = \text{restricted}).$$

Remark. For the deformation of representation of $E(3)$, the algebra being fixed, the picture associated with these results is very analogous to those which appears in the $SL(2, R)$ case (see appendix). The discrete casimir is left unchanged, the continuous one is translated along a real axis for the unitary deformed representations.

2. The Poincaré Group

In attempt to extend the above method (part II), it is natural to look for an expression of the Poincaré's unitary representations in a basis where the Lorentz subalgebra is diagonal. This procedure seems particularly suitable for a deformation leaving the homogeneous Lorentz part fixed. In the following we restrict ourselves to that kind of deformations only. We shall use the Lorentz basis form of the representations.

a) Spin Zero Case

Let us consider first a representation $[m, s]$ with $m > 0$ and $S = 0$. Restricted to $SL(2, C)$, it has the following reduction [Joos]:

$$(a) \quad D^{[m, 0]} = \int_0^\infty d\lambda \mathcal{D}^{0, i\lambda}.$$

(Denoting the unitary representations of $SL(2, C)$ in the usual way: $\mathcal{D}^{0, i\lambda}$).

In [10], it is shown that it is possible to transform the usual Poincaré's representation, in such a way that the translation operators act like *ladder operators between the non-unitary representations of $SL(2, C)$* .

For example (dropping the index $j_0 = 0$)

$$(b) \quad \varphi_0(P_0) |jm; \lambda\rangle = \frac{M}{2[\lambda(\lambda - i)]^{1/2}} [(j - i\lambda)(j + i\lambda + 1)]^{1/2} |jm; \lambda - i\rangle \\ + \frac{M}{2[\lambda(\lambda + i)]^{1/2}} [(j + i\lambda)(j - i\lambda + 1)]^{1/2} |jm; \lambda + i\rangle.$$

And there is at least a "formal" equivalence between the direct integral (a) and direct sum:

$$\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}^{0, i\lambda+n}.$$

[Since we can reconstruct the usual representation, from expression like (b)].

It is also in a similar sense (not very rigorous mathematically . . .) that we shall apply now the results of the section II. The dimension one for spaces like (2.5) or (2.9) comes from computations made in [10].

From (2.6), a cocycle is a transition operator between $\mathcal{D}^{0,i\lambda} \rightarrow \mathcal{D}^{0,i\lambda \pm 1}$, it corresponds to two sorts of coefficients $C^{\lambda+i,\lambda}$ and $C^{\lambda-i,\lambda}$. (2.13) gives only one non trivial relation on the symmetric part S of these coefficients:

$$S^{\lambda+i,\lambda} = S^{\lambda,\lambda+i} = C^{te} = a \quad (3.11)$$

where a is an arbitrary (possibly complex) number.

The antisymmetric part $A^{j,i}$ of $C^{j,i}$ can always be put under the form: $\mu^i - \mu^j$, which here also corresponds to a coboundary. Let us take for example:

$$\begin{aligned} b(p) &= \sum_{n=1}^p A^{\lambda+(n-1)i, \lambda+ni} \\ b(-p) &= \sum_{n=1}^p A^{\lambda-ni, \lambda-(n-1)i} \\ b(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Then

$$A^{\lambda+pi, \lambda+(p+1)i} = b(p+1) - b(p).$$

Finally, every cocycle can be put under the form:

$$\varphi^{p+1,p} = a \varphi_0^{p+1,p} + (b(p) - b(p+1)) \varphi_0^{p+1,p}, \quad (3.13)$$

where we had written p for $\lambda + ip$.

Restricted deformations into unitary representations: it is not possible to express directly in a non ambiguous way the unitarity of the group representations in the "Lorentz basis". However, using the explicit form of the hermitian operator $\varphi_0(P_0)$ we shall admit that a condition of hermiticity for $\varphi_1(P_0)$ is:

$$C^{\lambda,\lambda+1} = \overline{C^{\lambda,\lambda-1}}. \quad (3.14)$$

With this condition, a is now a real number.

Therefore from (3.13) $\dim H^1 = 1$ (on R).

b) Representation $m > 0$, $S \neq 0$

Four types of transition are allowed now. They are:

$$(j_0, \lambda) \rightarrow (j_0 \pm 1, \lambda)$$

or

$$(j_0, \lambda \pm i).$$

From (2.6), the matrix elements of the cocycle are proportionnal to those of the initial representation:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{j_0 \pm 1, \lambda; j_0 \lambda} &= C_{\lambda}^{j_0 \pm 1; j_0} \varphi_0^{j_0 \pm 1, \lambda; j_0 \lambda} \\ \varphi_1^{j_0, \lambda \pm i; j_0 \lambda} &= C_{j_0}^{\lambda \pm i, \lambda} \varphi_0^{j_0, \lambda \pm i, j_0 \lambda}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

The conditions (2.13) on the coefficients are of two sorts, according to the final state (j'_0, λ') is different or not from the initial state (j_0, λ) .

$\alpha)$ $(j'_0, \lambda') \neq (j_0, \lambda)$.

The situation can be pictured by:

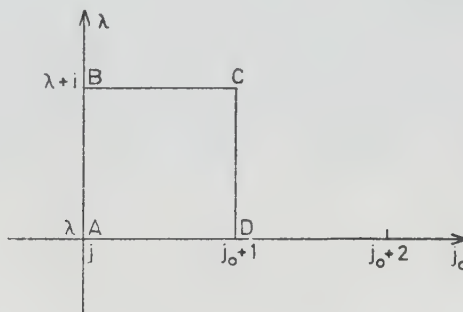


Fig. 1

Starting from A , B is a possible final state, and two ways are allowed: ABC and ADC .

The 2 conditions (2.13) may then be written (with obvious notations)

$$C^CB + C^BA = C^CD + C^DA, \quad (3.16)$$

Starting from C and going to A , one sees that the symmetric part and the antisymmetric part of C^AB satisfy independently this condition. Let us examine first the symmetric part of the coefficient S^AB . If we start from B to D , we have:

$$S^{DC} + S^{CB} = S^{DA} + S^{AB} \quad (3.17)$$

with (3.16), it gives:

$$\begin{cases} S^{AB} = S^{DC} \\ S^{DA} = S^{CB} \end{cases}$$

or more explicitly:

$$\begin{aligned} S_{j_0+1}^{\lambda+i, \lambda} &= S_{j_0}^{\lambda+i, \lambda} \\ S_{\lambda+1}^{j_0+1, j_0} &= S_{\lambda+i}^{j_0+1, j_0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

i. e. the symmetric part are independent of the "fixed index"

$$\begin{aligned} S_{j_0}^{\lambda+i, \lambda} &= S^{\lambda+i, \lambda} \\ S_{\lambda+1}^{j_0+1, j_0} &= S^{j_0+1, j_0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

The antisymmetric part A^AB can easily be put under the form of a difference $\lambda^A - \lambda^B$. It is enough to observe from (3.16) that it obeys a Chasles relation (and to proceed in the same way as in 3.12).

$\beta) (j'_0, \lambda') = (j_0, \lambda).$

The situation is a little more complicated since four ways are now allowed:

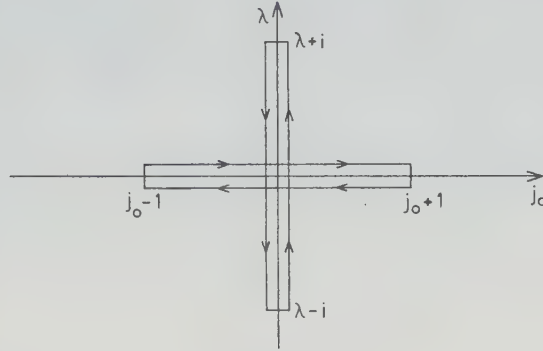


Fig. 2

We have to compute the forms B_0 defined by (2.10). It is enough to compute only the diagonal term. We use the following notation:

$$j_0, \lambda \langle jm | B^{j_0+1} (P_0, P_3) | jm \rangle_{j_0, \lambda} = B^{j_0+1}.$$

Up to factor, they are:

$$\begin{aligned} B^{j_0+1} &= -i\lambda(j-j_0)(j+j_0+1)\beta_{j_0} \\ B^{j_0-1} &= +i\lambda(j+j_0)(j-j_0+1)\beta_{j_0-1} \\ B^{\lambda+i} &= j_0(j+i\lambda)(j-i\lambda+1)\alpha_\lambda \\ B^{\lambda-i} &= -j_0(j-i\lambda)(j+i\lambda+1)\alpha_{\lambda-i}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

We use the notations of [10] for the expression of the representations. For example:

$$\begin{aligned} P_0 |jm\rangle_{j_0, \lambda} &= C_{0\lambda}^{j_0+1, j_0} [(j-j_0)(j+j_0+1)]^{1/2} |jm\rangle_{j_0+1, \lambda} \\ &+ C_{0\lambda}^{j_0-1, j_0} [(j+j_0)(j-j_0+1)]^{1/2} |jm\rangle_{j_0-1, \lambda} \\ &+ C_{0j_0}^{\lambda+i, \lambda} [(j+i\lambda)(j-i\lambda+1)]^{1/2} |jm\rangle_{j_0, \lambda+i} \\ &+ C_{0j_0}^{\lambda-i, \lambda} [(j-i\lambda)(j+i\lambda+1)]^{1/2} |jm\rangle_{j_0, \lambda-i} \end{aligned} \quad (3.20)$$

and

$$\begin{aligned} C_{j_0}^{\lambda, \lambda+i} C_{j_0}^{\lambda+i, \lambda} &= \alpha_\lambda \\ C_{\lambda}^{j_0+1, j_0} C_{\lambda}^{j_0, j_0+1} &= \beta_{j_0} \end{aligned}$$

α_λ and β_{j_0} being explicitly computed in [10]. For a representation $[m, S]$:

$$\alpha_\lambda = \frac{m^2}{4} \frac{(s+i\lambda)(s-i\lambda+1)}{(j_0+i\lambda)(j_0-i\lambda+1)(j_0-i\lambda)(j_0+i\lambda-1)},$$

β_{j_0} is obtained by changing $j_0 \leftrightarrow -i\lambda$.

Let us put now

$$\begin{aligned}\alpha'_\lambda &= S^{\lambda, \lambda+i} \alpha_\lambda \\ \beta'_{j_0} &= S^{j_0, j_0+1} \beta_{j_0}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

From the conditions (2.13):

$$S^{\lambda, \lambda+i} B_0^{\lambda+i} + S^{\lambda, \lambda-i} B_0^{\lambda-i} + S^{j_0, j_0+1} B_0^{j_0+1} + S^{j_0, j_0-1} B_0^{j_0-1} = 0 \quad (3.23)$$

or (using the independence of j of the constants).

$$\begin{aligned}j_0(\alpha'_\lambda - \alpha'_{\lambda-i}) &= i\lambda(\beta'_{j_0} - \beta'_{j_0-1}) \\ i\lambda(\alpha'_\lambda - \alpha'_{\lambda-i}) + j_0(\beta'_{j_0} - \beta'_{j_0-1}) \\ &+ (\alpha'_\lambda + \alpha'_{\lambda-i}) + (\beta'_{j_0} + \beta'_{j_0-1}) = 0.\end{aligned}\quad (3.24)$$

The solution of this equation is

$$\begin{aligned}\alpha'_\lambda &= \frac{\lambda(\lambda+i)\alpha - \gamma}{(j_0^2 + \lambda^2)(j_0^2 + (\lambda+i)^2)} \\ \beta'_{j_0} &= \frac{-j_0(j_0+1)\alpha - \gamma}{(j_0^2 + \lambda^2)((j_0+1)^2 + \lambda^2)},\end{aligned}\quad (3.25)$$

where α and γ are two constants ($\alpha, \gamma \in C$). Using the explicit form of α_λ and β_{j_0} , one gets finally:

$$\begin{aligned}S^{\lambda, \lambda+i} &= \frac{4}{m^2} \frac{\lambda(\lambda+i)\alpha - \gamma}{(s+i\lambda)(s-i\lambda+1)} \\ S^{j_0, j_0+1} &= -\frac{4}{m^2} \frac{j_0(j_0+1)\alpha + \gamma}{(s-j_0)(s+j_0+1)}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

The initial representation being of spin S , j_0 has to belong to $[-S, +S]$. The only way of eliminate the poles for $s = j_0, -j_0 - 1$ in $(3.26)^2$ is to put: $\gamma = -S(S+1)\alpha$. But then:

$$S^{\lambda, \lambda+i} = \frac{4\alpha}{m^2} = S^{j_0, j_0+1} = \alpha'. \quad (3.27)$$

We have then:

$$\varphi_1(P_\mu) = \alpha' \varphi_0(P_\mu) + [A, \varphi_0(P_\mu)] \quad (3.28)$$

where α' is a possible complex number.

Exactly as in the Euclidian case, we do not have made until now any restriction about the hermiticity. The condition that φ_1 is an hermitian operator is equivalent to the condition α' is a *real number* and A an antihermitian operator (in the impulsion basis).

c) Zero-Mass Representation and Discrete Helicity

The reduction on $SL(2, C)$ have been given in [10] and in [11]. There is only one possible transition from (j_0, λ) to $(j_0, \lambda - i)$ or $(j_0, \lambda + i)$, depending upon the sign $+$ or $-$ of the helicity, therefore one type of

² In fact in $S^{j_0, j_0+1} \cdot C^{j_0, j_0+1}$.

coefficient:

$$\varphi_1^{\lambda-i, \lambda}(p_\mu) = C^{\lambda-i, \lambda} \varphi_0^{\lambda-i, \lambda}(P_\mu). \quad (3.29)$$

In that case, the conditions (2.13) are always trivially satisfied: there is no condition on $C^{\lambda-i, \lambda}$.

Remark. A simple change of basis in the space $V = \oplus D^{j_0, \lambda + \ln}$ transform φ_1 into φ_0 .

d) Continuous Spin and Zero-Mass Representation

With $W^2 = -\zeta^2 I$, ζ continuous, the coefficients α_λ and β_{j_0} of the initial representation are:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= \frac{\zeta^2}{4(j_0^2 + \lambda^2)(j_0^2 + (\lambda + i)^2)}, \\ \beta_{j_0} &= \frac{\zeta^2}{4(j_0^2 + \lambda^2)(j_0 + 1)^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Four transitions are allowed in that case, and the computation is exactly the same as in the case $S \neq 0$, $m > 0$.

The only difference is that the domain of variation of j_0 is now $-\infty < j_0 < +\infty$.

From (3.25) one gets for the symmetric part of the coefficient:

$$\begin{aligned} S^{\lambda, \lambda+i} &= \frac{4}{\zeta^2} (\lambda(\lambda + i) \alpha - \gamma) \\ S^{j_0, j_0+1} &= -\frac{4}{\zeta^2} (j_0(j_0+1) \alpha + \gamma). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Finally, we have obtained the following results: for a unitary representation $[m, S]$ $m > 0$, $S \geq 0$ of the Poincaré group $\mathcal{P}$, the group $H^1(\mathcal{P}, L(V))$ is a one dimensional space on C . With the "unitary restriction", it is a one dimensional space on R .

In the case of the zero-mass representation, the obtained cocycle can always be transformed into the initial representation φ_0 by a change of basis.

In the continuous spin case, $H^1(\mathcal{P}, L(V))$ is a 2-dimensional space on C in general.

IV. Application to the Deformations of Representations

1. With a Fixed Algebra

In that case the coboundaries may always be rejected by means of a unitary transformation, and the only thing we have to consider is the deformation produced by the representative elements of $H^1(\mathcal{G}, L(V))$ [Cf. I. 5a].

It results from III, that the only deformations leaving the Lorentz subalgebra fixed of the Poincaré representation $[m, S]$ $m \neq 0$ are of the

form :

$$\begin{cases} \varphi_t(M_{\mu\nu}) = 0 \\ \varphi_t(P_\mu) = \alpha(t) q_0(P_\mu), \end{cases} \quad (4.1)$$

where $\alpha(t) = 1 + ta + t^2b + \dots$

and correspond to a representation $[m', S]$ with the same spin value, and with a different mass: $m'(t) = \alpha(t)m_0$. Of course this is not surprising, since the rigidity of the spin is expected.

A similar result holds for the $E(3)$ algebra. For the zero mass representation, it results from III, B, that the representation $[m = 0, j_0]$ is rigid. But here, it has to be noticed that the condition for the Lorentz algebra to be fixed is certainly too strong. In fact, if one allows the generators $\mathbf{N}$ to move, $\mathbf{J}$ being fixed, one can easily deform the mass zero representation of helicity S into a representation of mass $m \neq 0$. It follows clearly from the expressions of the generators given in [12].

2. With a Deformation of the Algebra. The "Gell-Mann Formula"

According to a general result of Richardson on the stability of the subalgebras, one knows that all the deformations of the algebra $K.T^3$ is of the following form :

the only new commutator is :

$$[X_\alpha, X_\beta]_t = [X_\alpha, X_\beta]_0 + tF_1(X_\alpha, X_\beta) \quad \dots \quad \text{where } X_\alpha, X_\beta \in T$$

and

$$F_1(X_\alpha, X_\beta) \in K.$$

Let us consider now a *second order* deformation $\mathcal{G}_t$ of the semi-direct product $\mathcal{G} = K.T$

$$\mathcal{G}_t \begin{cases} [X_\alpha, X_\beta] = t^2 C_{\alpha\beta}^i Y_i \\ [Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k & X_\alpha \in T \\ [Y_i, X_\alpha] = C_{i\alpha}^\beta X_\beta & Y_i \in K. \end{cases} \quad (4.2)$$

The first order deformations of the representation have already been examined with different methods by BEHREND [13] and HERMANN [14].

With :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t(Y) &= \varphi_0(Y) \\ \varphi_t(X) &= \varphi_0(X) + t\varphi_1(X), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

they have found that it is possible to take (with some assumptions) :

$$\varphi_1(X) = [\Delta, \varphi_0(X)], \quad (4.4)$$

where Δ is the second order casimir of K , suitably "normalized". The relation thus obtained, already known in some cases in the physics literature (for example [15, 16, 17]) was called the "Gell-Mann formula". For more details about that formula, we refer to Hermann articles [14].

³ K is semi-simple and T abelian.

Let us consider the Poincaré algebra (or $E(3)$ algebra). We know from (III) that the general form of φ_1 is:

$$\varphi_1(X) = \lambda \varphi_0(X) + [A, \varphi_0(X)], \quad (4.5)$$

where A commutes with $\varphi_0(K)$. A is then determined by its matrix elements $a(j_0, \lambda)$, depending only on the Lorentz representation $(j_0 \lambda)$.

In the following, we found the general form of A for a deformation of a Poincaré representation $[m, S]$ $m \neq 0$ corresponding to the following deformation:

$$\begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \\ [L_{\mu\nu}, P'_\rho] &= i(g_{\nu\rho}P'_\mu - g_{\mu\rho}P'_\nu) \\ [P'_\mu, P'_\rho] &= \varepsilon i t^2 L_{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\varepsilon = +1$ gives a deformation into $SO(3, 2)$, and

$\varepsilon = -1$ gives a deformation into $SO(4, 1)$.

We have used the notation

$$\begin{aligned} P'_\mu &= \varphi_t(P_\mu); \quad L_{\mu\nu} = \varphi_0(L_{\mu\nu}) = \varphi_t(L_{\mu\nu}) \\ P_\mu &= \varphi_0(P_\mu). \end{aligned}$$

We have to study the second-order condition of commutation, i. e.:

$$[\varphi_1(P_\mu), \varphi_1(P_\nu)] = \varepsilon i L_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

where φ_1 is given by (4.5):

$$\varphi_1(P_\mu) = \lambda P_\mu + [A, P_\mu].$$

a) Spin Zero Case

$j_0 = 0$, the matrix elements of A are only functions of λ . (4.7) gives only a condition on the coboundary part:

$$[[A, P_\mu], [A, P_\nu]] = \varepsilon i L_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

Let us define:

$$\sigma(\lambda) = a(\lambda + i) - a(\lambda)$$

we have

$$\begin{aligned} [A, P_\mu]^{\lambda+i, \lambda} &= \sigma(\lambda) P_\mu^{\lambda+i, \lambda} \\ [A, P_\mu]^{\lambda-i, \lambda} &= -\sigma(\lambda - i) P_\mu^{\lambda-i, \lambda} \end{aligned}$$

and (4.8) is equivalent to:

$$\begin{aligned} &-\sigma^2(\lambda) (P_\mu^{\lambda, \lambda+i} P_\nu^{\lambda+i, \lambda} - P_\nu^{\lambda, \lambda+i} P_\mu^{\lambda+i, \lambda}) \\ &-\sigma^2(\lambda - i) (P_\mu^{\lambda, \lambda-i} P_\nu^{\lambda-i, \lambda} - P_\nu^{\lambda, \lambda-i} P_\mu^{\lambda-i, \lambda}) = \varepsilon i L_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(the other parts are identically verified).

With the notations introduced in part II:

$$\sigma^2(\lambda) B_0^{\lambda+i}(P_\mu, P_\nu) + \sigma^2(\lambda - i) B_0^{\lambda-i}(P_\mu, P_\nu) = -\varepsilon i L_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

It is enough to examine one matrix element of the preceding form. Let us choose (see [10]):

$$\begin{aligned} & \langle \lambda, j+1, m | B_0^{(\lambda+i)} (P_0, P_3 | \lambda, j, m \rangle \\ &= -2 \left[\frac{(j+1)^2 - m^2}{(2j+1)(2j+3)} \right]^{1,2} \alpha_i [(j+1)^2 + \lambda^2]^{1/2} (\lambda - i). \end{aligned}$$

we have

$$\langle \lambda, j+1, m | L_{03} | \lambda, j, m \rangle = \left[\frac{(j+1)^2 - m^2}{(2j+1)(2j+3)} \right]^{1/2} ((j+1)^2 + \lambda^2)^{1/2}$$

and we know from the commutation of the P_μ , that:

$$B_0^{\lambda+i} + B_0^{\lambda-i} = 0.$$

Finally one gets from (4.10):

$$[\sigma(\lambda)^2 - \sigma(\lambda - i)^2] = \frac{\varepsilon \cdot i}{2\alpha_i(\lambda + i)}.$$

In the spin zero case

$$\alpha_\lambda = \frac{m^2}{4\lambda(\lambda + i)},$$

therefore

$$\sigma(\lambda)^2 - \sigma(\lambda - i)^2 = \frac{2}{m^2} \varepsilon i \lambda, \quad (4.11)$$

the solution of (4.11) is easy to obtain in 2 steps:

$$\sigma^2(\lambda) = \frac{\varepsilon}{m^2} (\lambda^2 + i\lambda + \gamma) \quad (4.12)$$

γ is an arbitrary constant

$$\text{then:} \quad a(\lambda + i) - a(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{m} (\lambda^2 + i\lambda + \gamma)^{1/2}. \quad (4.13)$$

The general solution for $a(\lambda)$ can be deduced from (4.13). It is a sum of square roots, and furnishes a dependence in λ which is in general irrational. i. e. A is an irrational function of $\mathbf{M}^2 - \mathbf{N}^2$. The *only simple* (and rational) case corresponds to $\gamma = -1/4$, i.e.:

$$a(\lambda + i) - a(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{m} \left(\lambda + \frac{i}{2} \right). \quad (4.14)$$

This is easily solved:

$$a(\lambda) = \mp \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2m} i (1 + \lambda^2) + \text{a constant.}$$

Or equivalently:

$$A = \pm \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2m} (\mathbf{N}^2 - \mathbf{M}^2) + \text{constant}, \quad (4.15)$$

which corresponds to the "Gell-Mann Formula".

[The hermitic solution corresponds to $\varepsilon = +1$, i. e. to a deformation into $SO(3, 2)$].

b) *Initial Representation*: $[m, S] \ m > 0, S \neq 0$

In the diagonal part of the Eq. (4.8), we have to take into account the four allowed transitions. We use the notations:

$$\begin{aligned}\sigma_{j_0}(\lambda) &= a(j_0, \lambda + i) - a(j_0, \lambda) \\ \varrho_\lambda(j_0) &= a(j_0 + 1, \lambda) - a(j_0, \lambda).\end{aligned}$$

Then:

$$\begin{aligned}\sigma_{j_0}^2(\lambda) B^{\lambda+i}(P_\mu, P_\nu) + \sigma_{j_0}^2(\lambda - i) B^{\lambda-i}(P_\mu, P_\nu) \\ + \varrho_\lambda^2(j_0) B^{j_0+1}(P_\mu, P_\nu) + \varrho_\lambda^2(j_0 - 1) B^{j_0-1}(P_\mu, P_\nu) = -\varepsilon i L_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

The computations are very analogous to those given in part III (2) and we omit the details. The results are the following:

— From the non diagonal part, one gets that:

either $\sigma_{j_0}(\lambda)$ is independent of j_0 and $\varrho_\lambda(j_0)$ independent of λ

$$\sigma_{j_0}(\lambda) = (-)^{j_0} \sigma(\lambda) \quad (4.17)$$

either

$$\varrho_\lambda(j_0) = (-)^{i\lambda} \varrho(j_0).$$

— The diagonal part furnishes 2 equations which can be solved by using the preceding remark. They are:

$$\begin{aligned}j_0(\alpha'_{\lambda-1} - \alpha'_\lambda) + i\lambda(\beta'_{j_0} - \beta'_{j_0-1}) &= 0 \\ i\lambda(\alpha'_\lambda - \alpha'_{\lambda-1}) - (\alpha'_\lambda + \alpha'_{\lambda-1}) - j_0(\beta'_{j_0} - \beta'_{j_0-1}) \\ - (\beta'_{j_0} + \beta'_{j_0+1}) &= -\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \alpha'_\lambda = \alpha_\lambda \sigma^2(\lambda) \\ \beta'_{j_0} = \beta_{j_0} \varrho^2(j_0) \end{cases}\end{aligned}\quad (4.18)$$

The solutions are

$$\sigma^2(\lambda) = \frac{\varepsilon \lambda^2 (\lambda + i)^2 + a_1 (\lambda^2 + (\lambda + i)^2) + b_1}{m^2 (s + i\lambda) (s - i\lambda + 1)} \quad (4.19)$$

and

$$\varrho(j_0) = \sigma(-ij_0).$$

A is an irrational function of the two Casimirs in general. The only simple case can be computed by requiring (4.19) to be a perfect square. The solutions is then unique up to a constant factor, it is:

$$a(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2m} i (1 + \lambda^2 - j_0^2)$$

and corresponds here also to the Gell-Mann formula.

Acknowledgements. We thank J. LASCoux for its interest and for a critical reading of the manuscript.

Conclusion

For all the reasons exposed in I. 5a, b, c, it is important to know the group $H^1(\mathcal{G}, L(V))$ for the deformations of the representations. We have seen that the group $H^1(\mathcal{G}, L(V))$ is a one-dimensional space on C , both

for the Euclidian and the Poincaré algebras (in the case $m > 0$, $S \geq 0$ for the last one). With some hermiticity conditions, necessary to produce a deformation into unitary representations of the group, it becomes a one dimensional space on R . Then the deformations of Poincaré's representations, the algebra being fixed, correspond simply to a variation of the mass, the spin being rigid. (As it can be expected in general for all the discrete numbers indexing the representation). When the algebra is also deformed, we have seen the general form of the first order deformation, the most simplest example being given by the "Gell Mann Formula".

Appendix

Deformation of the Continuous Series of $SL(2, R)$

Let us study the first order condition (1.6) (or 2.2) satisfied by a general deformation

$$\varphi_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n.$$

We start from a unitary representation of the $SL(2, R)$ Lie algebra: [of the class C_q^0 or $C_q^{1/2}$ in Bargmann notations],

$$\begin{aligned} \varphi_0(H_3) f_m &= m f_m \\ \varphi_0(H_+) f_m &= \alpha_m f_{m+1} \\ \varphi_0(H_-) f_m &= \bar{\alpha}_{m-1} f_{m-1} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

where m assumes all integers (or half integers) values between $-\infty, +\infty$. (One may choose $\alpha_m = (q + m(m-1))^{1/2}$ q being the value of the Casimir. We require that the deformation leaves the space $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} f_m$ unchanged, and the simplest way is to ask that $\varphi_0(H_3)$ remains fixed during the deformation.

From (2.2 c), $\varphi_1(H_{\pm})$ transforms under $\varphi_0(H_3)$ like $\varphi_0(H_{\pm})$, or equivalently:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(H_+) f_m &= C_m f_{m+1} \\ \varphi_1(H_-) f_m &= d_m f_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

The last relations (2.2 b) is

$$[\varphi_0(H_+), \varphi_1(H_-)] = [\varphi_0(H_-), \varphi_1(H_+)]$$

i. e.

$$d_m \alpha_{m-1} - \alpha_m d_{m+1} = C_m \bar{\alpha}_m - \bar{\alpha}_{m-1} C_{m-1} \quad (\text{A.3})$$

or

$$d_m \alpha_{m-1} + \bar{\alpha}_{m-1} C_{m-1} = C_m \bar{\alpha}_m + \alpha_m d_{m+1} = a,$$

where a is a complex number independant of m .

The solution can be written:

$$\left. \begin{aligned} d_m &= \frac{1}{\alpha_{m-1}} \left(\frac{a}{2} + \varrho_m \right) \\ C_{m-1} &= \frac{1}{\bar{\alpha}_{m-1}} \left(\frac{a}{2} - \varrho_m \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Let us examine now the condition of being a coboundary for φ_1 . The general form of a coboundary is of the type A.2 (because we are dealing with H_3 -relative cohomology), with:

$$\left. \begin{aligned} C_m &= (\mu_{m+1} - \mu_m) \alpha_m \\ d_m &= (\mu_{m-1} - \mu_m) \bar{\alpha}_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

For some arbitrary (complex) numbers μ_m .

It is then easy to see that any solution of the form (A.5) must have: $a = 0$.

It remains one condition: $\varrho_n = |\alpha_n|^2 (\mu_{n-1} - \mu_n)$ but it is always possible given a number $x_m = \frac{\varrho_m}{|\alpha_m|^2}$ to construct such μ_n . It is enough to take:

$$\mu_0 = 0, \mu_n = \sum_{p=1}^n x_p, \quad \mu_{-n} = - \sum_{p=0}^{n-1} x_{-p}.$$

To sum up, the group $H^1(SL(2, R), H_3, L(V))$ (relative to H_3) is — on C , a one-dimensional group, a representative of which being given by:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(H_+) f_m &= \frac{1}{\bar{\alpha}_m} f_{m+1} \\ \varphi_1(H_-) f_m &= \frac{1}{\alpha_{m-1}} f_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

One can check that there does not exist a non trivial deformation only at the first order. Nevertheless it is easy to prove that a cocycle (A.6) is “integrable” (i. e. is the first term of a family φ_n given a deformation). It is enough to consider the representation corresponding to the value $q + at$ of the casimir. One has (up to a phase)

$$\begin{aligned} C_m(t) &= (q + m(m-1) + at)^{1/2} \\ C_m(t) &= \alpha_m + \frac{1}{2} \frac{at}{\alpha_m} + \dots \end{aligned}$$

It is also easy to measure the weakness of the “equivalence to the first order” on that example. Using the previous deformation, one can construct a series of non equivalent deformations with the same first term φ_1 .

Restricted Deformations

Until now, we have not taken into account any consideration of unitarity, and a complex number a leads to a non-unitary deformed representation.

Let us require now the unitarity of the deformation. For q_1 , it means: $d_m = \bar{c}_{m-1}$ and from (A.3) one sees that a is then a real number.

In that case (choosing a real α_m), H^1 is a one-dimensional space, on R . Both cases correspond well to the intuitive picture.

Since the character integer or half integer is not altered by a deformation, we can choose for "structure space" the complex plane: a representation being determined by the value of its casimir q . The unitary continuous series are lying on an axis: $q \geq 1/4$ so that:

- a deformation into a unitary representations can start into only one direction (this axis);
- a deformation into a non unitary one can start into any directions in the complex plane: this is expressed by a multiplication by a complex number.

References

1. GEORGE, C., and M. LEVY-NAHAS: J. Math. Phys. **7**, 980 (1966).
2. LEVY-NAHAS, M.: To be published (in french) in the Compte-rendu du Colloque de Gif-sur-Yvette.
3. HERMANN, R.: Analytic continuation of group representations: III. Commun. Math. Phys. **3**, 75 (1966); IV. Commun. Math. Phys. **5**, 131 (1967).
4. GERSTENHABER, M.: Ann. Math. **78**, 267 (1963).
5. HERMANN, R.: II. Commun. Math. Phys. **3**, 53 (1966).
6. LEVY-NAHAS, M.: J. Math. Phys. **8**, (1967).
7. Séminaire "Sophus Lie" 1954/1955. E. N. S. Paris.
8. GEORGE, C.: Exposé à l'Inst. Henri Poincaré en 1966 (Paris).
9. HOCHSCHILD, G., and J. P. SERRE: Ann. Math. **57**, 591 (1953).
10. CHAKRABARTI, A., M. LEVY-NAHAS et R. SENEOR: Preprint, École Polytechnique, Paris, Juin 1967.
11. MUKUNDA, N.: Preprint, Syracuse Univ. NYO-3399-107 (1967).
12. CHAKRABARTI, A.: J. Math. Phys. **3**, 405 (1962).
13. BEHREND: On the reversal problem. Math. Inst. Freie Univ. Berlin (1966).
14. HERMANN, R.: Commun. Math. Phys. **2**, 155 (1966); and references quoted of therein (Lie groups for physicists).
15. FRONSDAL, C.: Rev. Mod. Phys. **37**, 221 (1965).
16. GOTSMAN, E., and Y. NE'EMAN: Coral Gables Conf. Jan. 1966, p. 137.
17. BARUT, A. O., and A. BÖHM: Phys. Rev. **139**, B 1107 (1965).
18. HERMANN, R.: V. Commun. Math. Phys. **5**, 157 (1967); VI. Preprint, Stanford Univ. California, March 1967.

DR. R. SENEOR
Centre de Physique Théorique de
l'Ecole Polytechnique
17, Rue Descartes
F-75 Paris V

XIV - UN CAS PARTICULIER DE DEFORMATIONS DE REPRESENTATIONS AU PREMIER ORDRE : LES DERIVEES DE LIE GENERALISEES.

Les résultats de cette partie ne sont pas nouveaux, et sont essentiellement contenus dans la référence indiquée plus loin. Il nous a semblé néanmoins intéressant d'établir leur rapport avec la théorie des déformations, car ils en fournissent une illustration simple (au moins en ce qui concerne les déformations de représentations seules).

Nous allons montrer que dans le cas d'algèbres de Lie représentées par des opérateurs différentiels, il est possible d'obtenir une classification complète de certaines déformations : celles-ci s'identifient aux dérivées généralisées de Lie d'une fonction analytique au voisinage d'un point. On verra qu'aux déformations précédentes correspondent des déformations des représentations du groupe local G associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, déformations qui sont caractérisées par l'introduction d'un multiplicateur. De plus, les classes d'équivalence de multiplicateurs sont en correspondance biunivoque avec un groupe $H^1(G, \mathfrak{U})$ où $\mathfrak{U}$ est l'espace sur lequel la représentation initiale de $\mathfrak{g}$ est définie.

Notre référence essentielle pour cette partie est le livre de W. Miller : "Lie theory and special functions" [M].

Notations : On appellera $\mathfrak{U}$ l'espace des fonctions qui sont analytiques dans un voisinage d'un point $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^m$. (espace des germes de fonctions analytiques), et on prendra $\vec{x}_0 = (0, 0, 0 \dots 0) = \vec{0}$.

Soit (μ, V) une algèbre de Lie dont la loi est notée par le crochet. Nous désignerons une base de l'espace vectoriel V par $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ et un élément quelconque de V par $\alpha = \sum_j c_j \alpha_j$.

Soit φ une représentation de μ par des dérivations de $\mathfrak{U}$. Elle

est de la forme suivante :

$$\varphi \in \text{Hom}(\mu, \text{Der } \mathcal{U}) \quad (\text{XIV.1})$$

$$\varphi(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m P_{ji}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad j = 1, \dots, n$$

Pour $f \in \mathcal{U}$, $\varphi(\alpha_j).f$ doit être définie, et analytique dans un voisinage ouvert de $\vec{x}_0$.

Déformation au premier ordre de φ

Nous allons nous intéresser à des déformations φ_t de φ qui ne conduisent plus nécessairement à des dérivations de $\mathcal{U}$. Soit

$$\varphi_t(\alpha) = \varphi(\alpha) + t \varphi_1(\alpha) \quad \alpha \in V$$

$$\varphi_t \in \text{Hom}(\mu, L(\mathcal{U}))^{(*)} \quad (\text{XIV.2})$$

φ_1 doit donc vérifier les conditions suivantes :

$$[\varphi(\alpha_i), \varphi_1(\alpha_j)] - [\varphi(\alpha_j), \varphi_1(\alpha_i)] = \varphi_1[\alpha_i, \alpha_j] \quad \forall \alpha_i \in V \quad (\text{XIV.3})$$

$$\alpha_j \in V$$

c'est-à-dire $\varphi_1 \in Z^1(\mu, L(\mathcal{U}))$ $L(\mathcal{U})$ étant muni de la structure (canonique) de μ -module associé à celle de $\mathcal{U}$:

$$A \in L(\mathcal{U}) \rightsquigarrow \alpha.A = [\varphi(\alpha), A] \quad (\text{XIV.4})$$

Et à l'ordre t^2 , l'algèbre étant fixe, on a :

$$[\varphi_1(\alpha_i), \varphi_1(\alpha_j)] = 0 \quad \forall \alpha_i, \alpha_j \in V \quad (\text{XIV.5})$$

Ecrivons maintenant la condition d'équivalence de deux déformations. Pour cela, nous devons préciser la notion d'équivalence que nous avons utilisée dans le cas d'une représentation dans un espace vectoriel W . [XI].

(*) $L(\mathcal{U})$ = applications linéaires de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$.

Un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ sera fourni par la multiplication par une fonction g de $\mathcal{U}$, telle que $g(\vec{0}) \neq 0$. En effet $g^{-1} \in \mathcal{U}$ et $g.f \in \mathcal{U}$ [$(g.f)(\vec{x}) = g(\vec{x})f(\vec{x})$]. Il induit sur l'espace $L(\mathcal{U})$ un isomorphisme d'espace vectoriel : $\varphi \rightarrow g^{-1} \circ \varphi \circ g$ définit par $\alpha \rightarrow g^{-1} \cdot \varphi(\alpha) \cdot g$.

La condition d'équivalence est alors très semblable à celle que l'on a choisit dans le cas de représentations dans un espace W :

Deux déformations φ_t et φ'_t de la représentation φ dans l'espace $L(\mathcal{U})$ sont équivalentes, s'il existe une fonction $g_t \in \mathcal{U}$, $g_t(\vec{0}) \neq 0$, telle que

$$\varphi'_t(\alpha) = g_t^{-1} \circ \varphi_t(\alpha) \circ g_t \quad (\text{XIV.6})$$

Nous imposerons en plus que g_t dépende analytiquement du paramètre t .

Avec $g_t(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n g_n(\vec{x})$, on obtient une infinité de relation. En supposant $g_0(\vec{x}) = 1$, on a (*)

$$\begin{aligned} \varphi'_1(\alpha) &= \varphi_1(\alpha) + [\varphi(\alpha), g_1] \\ [\varphi(\alpha), g_2] &= g_1[\varphi(\alpha), g_1] - [\varphi_1(\alpha), g_1] \\ &\vdots \\ [\varphi(\alpha), g_n] &= g_{n-1}[\varphi(\alpha), g_1] - [\varphi_1(\alpha), g_{n-1}] \end{aligned} \quad (\text{XIV.7})$$

La première équation signifie que

$$\varphi'_1 - \varphi_1 \in B^1(\mu, L(\mathcal{U}))$$

En général, si elle est vérifiée, on ne peut pas en déduire que les relations d'équivalence aux ordres suivants peuvent être satisfaites.

(*) dans la suite $\mathcal{U}$ est plongée canoniquement dans $L(\mathcal{U})$ par :

$g \in \mathcal{U} \rightarrow$ opérateur de multiplication par la fonction g que l'on note encore g .

Ici, nous pouvons considérer un cas particulier non trivial :
supposons que :

$$[\varphi_1(\alpha), f] = 0 \quad \text{pour toute fonction } f \in \mathcal{U}$$

$\varphi_1(\alpha)$ étant linéaire, si l'on suppose que $\varphi_1(\alpha)$ s'exprime en fonction de z et $\frac{\partial}{\partial z}$ (et non de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$), cela signifie que $\varphi_1(\alpha)$ est la multiplication par une fonction de $\mathcal{U}$.

Examinons ce que devient le système [XIV.7] dans ce cas.
Comme $\varphi(\alpha)$ est une dérivation, on a :

$$[\varphi(\alpha), g_1]f = \varphi_\alpha(g_1) \cdot f$$

on note $\varphi_\alpha(g_1)$ fonction de $\mathcal{U}$ égale à $\varphi(\alpha)(g_1)$ et

$$g_1 \cdot [\varphi(\alpha), g_1] = \varphi_\alpha\left(\frac{g_1^2}{2}\right)$$

d'où l'équation à l'ordre 2 :

$$[\varphi(\alpha), g_2 - \frac{g_1^2}{2}] = 0$$

que l'on résoud en prenant $g_2 = g_1^2/2$.

Supposons alors qu'avec $g_p = g_1^p/p!$ on ait résolu toutes les conditions jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus. On obtient à l'ordre n :

$$[\varphi(\alpha), g_n] = \frac{g_1^{n-1}}{(n-1)!} [\varphi(\alpha), g_1]$$

ce qui se résoud avec $g_n = g_1^n/n!$.

Par conséquent, si l'on se restreint à des déformations au premier ordre, telles que $[\varphi_1(\alpha), f] = 0, \forall f \in \mathcal{U}$, on voit que deux déformations φ_t et φ'_t qui sont équivalentes au 1er ordre en t , sont

équivalentes à tous les ordres. Plus précisément, si

$$\varphi'_1 - \varphi_1 = \delta g_1$$

$$\text{alors } \varphi'_t(\alpha) = g_t^{-1} \cdot \varphi_t(\alpha) \cdot g_t \quad \text{avec} \quad g_t(\vec{x}) = e^{tg_1(\vec{x})}.$$

Dérivation généralisée

Définition 1 : Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{C}$, contenant un élément unité. Une application linéaire D de A dans A est une dérivation généralisée si :

$$D(fh) = f D(h) + D(f)h - D(1)fh \quad (\text{XIV.8})$$

On vérifie alors facilement que, si l'on prend pour $\varphi_1(\alpha)$ l'opérateur de multiplication par une fonction $\varphi_1(\alpha)$ de $\mathcal{U}$, la déformation $\varphi_t(\alpha)$ est une dérivation généralisée de $\mathcal{U}$, avec $\varphi_t(\alpha)(1) = t \varphi_1(\alpha)$.

Par l'application $\mathcal{U} \rightarrow L(\mathcal{U})$ qui associe à une fonction $f \in \mathcal{U}$ l'opération multiplication par f, $\mathcal{U}$ devient un μ -module pour la relation (XIV.4), c'est-à-dire ici :

$$\alpha.f = [\varphi(\alpha), f] = \varphi(\alpha)(f) \quad (\text{XIV.9})$$

La déformation est alors caractérisée par un élément de $Z^1(\mu, \mathcal{U})$ (pour cette structure de μ -module sur $\mathcal{U}$). En effet, il n'y a pas de condition d'intégrabilité puisque :

$$[\varphi_1(\alpha_i), \varphi_1(\alpha_j)] = 0 \quad \forall \alpha_i, \alpha_j \in V$$

De plus, deux déformations φ_t et φ'_t sont équivalentes, à tous les ordres, si et seulement si $\varphi'_1 - \varphi_1 \in B^1(\mu, \mathcal{U})$.

Ainsi, il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de dérivations généralisés de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire les déformations de la forme : $\varphi_t(\alpha) = \varphi(\alpha) + t\varphi_1(\alpha)$,

où $\varphi(\alpha)$ est une dérivation de $\mathcal{U}$, et $\varphi_1(\alpha)$ un élément de $\mathcal{U}$, et les 1-classes de cohomologie du groupe $H^1(\mu, \mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ étant un μ -module suivant (XIV.9).

Conséquence : il existe une structure d'espace vectoriel sur les déformations de la même dérivation $\varphi(\alpha)$ considérées. (Ce qui n'est en général pas le cas parce que les conditions d'intégrabilité ne sont pas linéaires). La somme de deux déformations de $\varphi(\alpha)$ caractérisées par $\varphi_1(\alpha)$ et $\varphi'_1(\alpha)$ est la déformation de $\varphi(\alpha)$ correspondant à $\varphi_1 + \varphi'_1$. On a un isomorphisme d'espace vectoriel entre l'espace $\Lambda(\varphi)$ des classes d'équivalence de déformation de φ et l'espace $H^1(\mu, \mathcal{U})$.

Un résultat sur la dimension du groupe $H^1(\mu, \mathcal{U})$

Le groupe $H^1(\mu, \mathcal{U})$ peut a priori être de dimension infinie. On a cependant un théorème de finitude dans le cas de représentations transitives de l'algèbre de Lie .

Définition 2 : Soit $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ une représentation d'une algèbre μ par des dérivations généralisées sur une algèbre associative A . φ_α est dite transitive si : $\varphi_\alpha(f) = 0$ pour tout $\alpha \in \mu$ implique $f = a1$, $a \in \mathbb{C}$.

Il en résulte que :

$$\dim H^0(\mu, A) = 1$$

Puisque ce groupe est formé par les éléments $f \in A$ tels que :

$$\delta f = [\varphi_\alpha, f] = \varphi_\alpha(f) = 0 \quad \forall \alpha \in \mu$$

Théorème 1 [M] : Soit φ une représentation transitive de μ par des dérivations sur $\mathcal{U}$, et soit $\mathcal{K}$ la sous-algèbre de μ isotrope par rapport à φ :

$$\mathcal{K} = \{ \alpha \in \mu, [\varphi_\alpha(f)](\vec{0}) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{U} \}$$

Alors, si $\mathcal{K}^* = [\mathcal{K}, \mathcal{K}]$ est l'algèbre dérivée de $\mathcal{K}$, on a :

$$\dim H^1(\mu, \mathcal{U}) = \dim \mathcal{K} - \dim \mathcal{K}^*$$

Rapport avec les représentations locales du groupe

Avant de donner des exemples de déformations, montrons le lien avec les représentations du groupe local de Lie correspondant.

Soit G un groupe local de Lie de transformation agissant sur un voisinage ouvert U de $\mathbb{C}^m$, $\vec{0} \in U$. G est défini par une application de $U \times G \rightarrow \mathbb{C}^m$, notée : $(\vec{x}, g) \rightarrow \vec{x}.g$ analytique en $\vec{x}$ et g , telle que $\vec{x}.e = \vec{x}$, et $(\vec{x}.g)g' = \vec{x}(g.g')$ si $\vec{x}.g \in U$.

Définition 3 : Une représentation locale à multiplicateur $T^\vee$ de G dans $\mathcal{U}$ est une application $T^\vee(g)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, définie par :

$$[T^\vee(g)f](\vec{x}) = v(\vec{x}, g) f(\vec{x}.g)$$

où $v(\vec{x}, g)$ est une fonction analytique en $\vec{x}$ et en g , à valeurs complexes.

La condition : $[T^\vee(g_1 g_2)f](\vec{x}) = [T^\vee(g_1)[T^\vee(g_2)f]](\vec{x})$ implique les conditions suivantes sur le multiplicateur v :

$$v(\vec{x}, e) = 1, \quad \forall \vec{x} \in U$$

$$v(\vec{x}, g_1 g_2) = v(\vec{x}, g_1) v(\vec{x}.g_1, g_2)$$

$$g_1 g_2 \in G \text{ si } \vec{x}.g_1 \in U$$

La réciproque du second théorème fondamental de Lie assure qu'à toute algèbre de Lie réalisée par des dérivations sur $\mathcal{U}$ correspond un groupe local de Lie.

$$\text{Si les générateurs de } \mu \text{ sont : } L_j(x) = \sum_{i=1}^m P_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j=1, \dots, n$$

défini dans un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{C}^m$, l'action du groupe G sur $\vec{x}_0 \in U$ est :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cdot e^{(\sum \alpha_j L_j)t} \quad (\text{XIV.10})$$

Elle s'obtient en intégrant les équations :

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = (\sum \alpha_j L_j)(\vec{x}) \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^0 \quad (\text{XIV.11})$$

De même, on montre qu'à toute réalisation d'une algèbre de Lie par des dérivations généralisées sur $\mathcal{U}$, correspond une représentation à multiplicateur du groupe G .

Soit

$$L_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n P_{ji}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + P_j(\vec{x})$$

L'action du groupe sur U est défini par la partie qui est une dérivation comme dans le résultat précédent. Le multiplicateur est défini par :

$$\begin{cases} \alpha \in \mu \\ e^{\alpha t} \in G \end{cases} \quad \frac{d}{dt} v(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) = v(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j(\vec{x}(t)) \quad (\text{XIV.12})$$

$$v(\vec{x}^0, e) = 1$$

[M]

En résumé, on a le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit μ une algèbre de Lie complexe et G le groupe de Lie local tel que $\mu = \mathcal{L}(G)$ (algèbre de Lie de G). Il y a une correspondance biunivoque entre les représentations φ de μ par des dérivations généralisées φ et les représentations locales à multiplicateur $T^\vee$ de G sur $\mathcal{U}$. De plus φ est transitive si et seulement si $T^\vee$ est transitive.

Notons que la représentation $T^\vee$ se met aussi dans ce cas sous la forme d'une exponentielle :

avec $g = e^{\alpha t}$ $g \in G$, $\alpha = \sum \alpha_j e_j$ $\alpha \in \mu$

$$[T^v(e^{\alpha t})f](\vec{x}) = v(\vec{x}, e^{\alpha t}) f(\vec{x}.e^{\alpha t})$$

Si $\alpha \rightarrow \varphi(\alpha) = \varphi_\alpha$ est la dérivation généralisée représentant l'élément $\alpha \in \mu$, on a :

$$[T^v(e^{\alpha t})f](\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\varphi_\alpha^n f](\vec{x}) \quad (\text{XIV.13})$$

Conséquence : Déformation d'une représentation d'un groupe local de transformation

Supposons que nous ayons une algèbre de Lie μ représentée par des dérivations φ sur $\mathcal{U}$. Il lui correspond un groupe de Lie local G agissant sur les éléments de $\mathcal{U}$ par :

$$[e^{\alpha t}.f](\vec{x}) = f(\vec{x}.e^{\alpha t}) \quad \alpha \in \mu, \vec{x} \in U$$

où l'action de G sur U : $\vec{x}.e^{\alpha t}$ s'obtient à partir de φ . (XIV.11)

Soit T_0 cette représentation de G .

Soit $\varphi_\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha) + \lambda \varphi_1(\alpha)$ une déformation de φ par des dérivations généralisées, c'est-à-dire avec $\varphi_1(\alpha) \in \mathcal{U}$. (*)
Il lui correspond une déformation de la représentation T^0 du groupe, soit T_λ de la forme :

$$[T_\lambda(e^{\alpha t}).f](\vec{x}) = v_\lambda(\vec{x}, e^{\alpha t}) f(\vec{x}.e^{\alpha t}) \quad (\text{XIV.14})$$

où v_λ dépend exponentiellement de λ :

$$v_\lambda(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) = e^{\lambda \int_0^t \sum_j \alpha_j P_j(\vec{x}^0, e^{\alpha t'}) dt'}$$

(*) Nous notons dans la suite λ le paramètre de déformation pour éviter toute confusion avec le paramètre t servant à définir le groupe).

Pour $\lambda = 0$, $v_0(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) = 1$, T_λ redonne la représentation T_0 .

Posons

$$v_1(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) = \left. \frac{d}{d\lambda} v_\lambda(\vec{x}^0, e^{\alpha t}) \right|_{\lambda=0} \quad (\text{XIV.15})$$

En dérivant la relation de définition (def.3) du multiplicateur par rapport à λ , on obtient :

$$v_1(\vec{x}, g_1 g_2) = v_1(\vec{x}, g_1) + v_1(\vec{x}, g_1, g_2) \quad (\text{XIV.16})$$

Nous pouvons interpréter ce résultat à l'aide de la cohomologie du groupe G à valeurs dans le groupe abélien des fonctions $f \in \mathcal{U}$.

Pour g fixé, la fonction $v_1(\vec{x}, g)$ est analytique en $\vec{x}$ dans un voisinage de $\vec{0}$, c'est donc un élément de $\mathcal{U}$, notons $\phi(g)$ cet élément ($\phi(g)(\vec{x}) = v_1(\vec{x}, g)$).

L'application $g \rightarrow \phi(g)$ est un 1-cocycle de G dans $\mathcal{U}$ pour la structure de G -module défini sur $\mathcal{U}$ par la représentation T_0 . Notons celle-ci simplement $g.f$:

$$[g.f](\vec{x}) = [T_0(g).f](\vec{x}) = f(\vec{x}.g)$$

En effet :

$$(\delta\phi)(g_1, g_2) = g_1.\phi(g_2) + \phi(g_1) - \phi(g_1.g_2)$$

Appliqué à $\vec{x} \in U$ voisinage ouvert de $\vec{0}$, on obtient la relation (XIV.16).

$v_1(\vec{x}, g)$ définit donc un élément de $Z^1(G, \mathcal{U})$.

Equivalence de deux déformations T_λ et T'_λ de la même représentation T_0 :

Définition 4 : deux déformations T_λ et T'_λ seront dites équivalentes, s'il existe une fonction $\varphi_\lambda \in \mathcal{U}$, telle que $\varphi_\lambda(\vec{0}) \neq 0$, et que :

$$T'_\lambda = \varphi_\lambda^{-1} \circ T_\lambda \circ \varphi_\lambda$$

Les multiplicateurs correspondants vérifient :

$$v'_\lambda(x, g) = v_\lambda(\vec{x}, g) \frac{\varphi_\lambda(\vec{x} \cdot g)}{\varphi_\lambda(\vec{x})} \quad (\text{XIV.17})$$

Supposons $\varphi_0 = 1$.

Dérivons la condition précédente en λ , on obtient :

$$\begin{aligned} v'_1(\vec{x}, g) - v_1(\vec{x}, g) &= \varphi_1(\vec{x} \cdot g) - \varphi_1(\vec{x}) \\ &= [g \cdot \varphi_1](\vec{x}) - \varphi_1(\vec{x}) \\ &= [\delta \varphi_1(g)](\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{XIV.18})$$

Donc les éléments $v_1(\vec{x}, g)$ et $v'_1(\vec{x}, g)$ définissent des fonctions $\phi_1(g)$ et $\phi'_1(g)$ qui diffèrent par un 1-cobord de G dans $\mathcal{U}$.

Par conséquent, les classes d'équivalence de déformations infinitésimales de la représentation T_0 du groupe G sont en correspondance avec le groupe $H^1(G, \mathcal{U})$.

Il résulte du théorème 2 qu'il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de ce groupe $H^1(G, \mathcal{U})$ et les représentations à multiplicateur du groupe G sur $\mathcal{U}$. La correspondance est donnée par les expressions (14, 15).

Exemple de déformations qui sont des dérivées de Lie généralisées

(*)
Considérons l'algèbre de Lie des rotations $\mathfrak{L}(0_3)$. En introduisant les générateurs : $[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$, posons :

$$\begin{cases} \alpha_+ &= i e_1 - e_2 \\ \alpha_- &= i e_1 + e_2 \\ \alpha_3 &= i e_3 \end{cases}$$

$$\alpha_+^+ = -\alpha_-, \quad \alpha_3^+ = -\alpha_3$$

$$[\alpha_3, \alpha_+] = \alpha_+ \quad [\alpha_3, \alpha_-] = -\alpha_- \quad [\alpha_+, \alpha_-] = 2\alpha_3 \quad (\text{XIV.19})$$

Considérons les représentations de $\mathfrak{L}(0_3)$ dans un espace $\mathcal{U}$ de fonctions analytiques au voisinage de $\vec{0}$, dépendant d'une seule variable. (Nous ne nous occupons pas à ce stade ni de l'irréductibilité de la représentation, ni de ses propriétés d'hermiticité ou d'intégrabilité au groupe).

On obtient facilement les représentations de $\mathfrak{L}(0_3)$ par des dérivations sur $\mathcal{U}$. Elles sont de la forme :

$$\varphi(\alpha_+) = \varphi_+(z) \frac{d}{dz}, \quad \varphi(\alpha_-) = \varphi_-(z) \frac{d}{dz}, \quad \varphi(\alpha_3) = \varphi_3(z) \frac{d}{dz} \quad (\text{XIV.20})$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \varphi_3 e^{\int_{\alpha}^z \frac{dz'}{\varphi_3(z')}} & \varphi_- &= -\varphi_3 e^{-\int_{\alpha}^z \frac{dz'}{\varphi_3(z')}} \end{aligned}$$

Lie a montré que parmi celles-ci, une seule représentation est transitive, elle correspond (modulo un choix de constantes) à $\varphi_3(z) = z$, $\varphi_+(z) = z^2$, $\varphi_-(z) = -1$.

(*) sur $\mathbb{C}$.

Soit φ_0 cette représentation

$$\begin{cases} \varphi_0(\alpha_3) &= z \frac{d}{dz} \\ \varphi_0(\alpha_+) &= z^2 \frac{d}{dz} \\ \varphi_0(\alpha_-) &= - \frac{d}{dz} \end{cases} \quad (\text{XIV.21})$$

Cherchons l'ensemble des déformations au 1er ordre de φ_0 qui sont des dérivations de Lie généralisées. D'après les résultats précédents, les classes d'équivalence de telles déformations sont en correspondance biunivoque avec le groupe $H^1(\mu, \mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est muni d'une structure de μ -module par :

$$f \rightarrow \alpha.f = [\varphi_0(\alpha), f] \quad f \in \mathcal{U}, \quad \alpha \in \mu = \mathcal{L}(0_3)$$

Ici on a le résultat :

$$\dim H^1(\mu, \mathcal{U}) = 1 \quad (\text{XIV.22})$$

Il s'agit d'une dimension sur $\mathbb{C}$.

En effet, l'espace $\mathcal{K}$ est formé des éléments α_3 et α_+ , et l'espace $\mathcal{K}^* = [\mathcal{K}, \mathcal{K}]$ de α_+ . D'où :

$$\dim \mathcal{K} - \dim \mathcal{K}^* = 1$$

(et on utilise le théorème 1).

Un représentatif de $H^1(\mu, \mathcal{U})$ s'obtient facilement :

$$\varphi_1(\alpha_+) = 2z \quad \varphi_1(\alpha_-) = 0 \quad \varphi_1(\alpha_3) = -1$$

Les cobords sont de la forme :

$$\delta\phi(\alpha) = [\varphi_0(\alpha), f] = \varphi_0(\alpha)(f)$$

Soit

$$\delta f(\alpha_+) = z^2 \frac{df}{d\bar{z}}, \quad \delta f(\alpha_-) = - \frac{df}{d\bar{z}}, \quad \delta f(\alpha_3) = z \frac{df}{d\bar{z}}$$

Et l'expression générale des déformations du type considéré est donc :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\alpha_+) &= z^2 \frac{d}{d\bar{z}} + 2\lambda z + z^2 \frac{df}{d\bar{z}} \\ \varphi_\lambda(\alpha_-) &= - \frac{d}{d\bar{z}} - \frac{df}{d\bar{z}} \\ \varphi_\lambda(\alpha_3) &= z \frac{d}{d\bar{z}} - \lambda + z \frac{df}{d\bar{z}} \end{aligned} \quad (\text{XIV.23})$$

où f est une fonction arbitraire de $\mathcal{U}$, et λ un nombre complexe.

Au niveau du groupe local correspondant, on obtient la représentation locale suivante :

$$\begin{aligned} g &= e^{t_+ \alpha_+} e^{t_- \alpha_-} e^{t_3 \alpha_3} \quad t_+, t_-, t_3 \in \mathbb{R} \\ g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e^{\frac{t_3}{2}} = d^{-1} \\ t_+ = -\frac{b}{d} \\ t_- = -c d \end{cases} \\ [T_\lambda(g)f](z) &= (bz + d)^{2\lambda} f\left(\frac{az + c}{bz + d}\right) \end{aligned} \quad (\text{XIV.24})$$

on a donc $v_\lambda(z, g) = (bz + d)^{2\lambda}$. Ceci étant défini pour z et g dans des voisinages convenables de $\vec{0}$ et de l'identité e dans G respectivement.

Les représentations $\varphi_\lambda(\alpha_i)$ sont antisymétriques ($i=1,2,3$) pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Elles ne conduisent cependant pas en général à des représentations unitaires (globales) du groupe O_3 (ou même $SU(2)$). Comme il est bien connu (cf. Naimark; Guel'fand, Minlos et Shapiro) celles-ci correspondent à des représentations de dimension finie qui se réalisent dans

des espaces H_m de polynômes z^ν de degré inférieur ou égal à m . On obtient dans ce cas une représentation de dimension $(m+1)$, l'expression des représentations de l'algèbre étant fournies par les formules précédentes avec $2\lambda = m$. λ (qui représente donc par ailleurs le poids dominant), doit être entier ou $1/2$ entier. Il est clair que si l'on se restreint à l'espace H_m , les représentations de dimension finie correspondante sont rigides (conformément au résultat général).

Exemple de contraction d'une famille de représentations

Les déformations φ_λ précédentes, qui forment une famille à 1 paramètre de représentations de $\mathfrak{L}(0_3)$, se contractent dans une famille de représentations de $\mathfrak{L}(E_2)$, algèbre de Lie du groupe euclidien du plan.

Les représentations de $\mathfrak{L}(E_2)$ se réalisent, sur le même espace $\mathcal{U}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi^w(\alpha_+) &= wz \\ \varphi^w_0(\alpha_-) &= \frac{w}{z} \\ \varphi^w_0(\alpha_3) &= z \frac{d}{dz} + m_0\end{aligned}\tag{XIV.25}$$

Une représentation est caractérisée par la valeur du casimir w^2 et le spectre de $\varphi(\alpha_3) : m_0 + n, n \in \mathbb{Z}$. $0 \leq \text{Re } m_0 < 1$. Montrons, par exemple, la contraction dans le cas $m_0 = 0$. Soit φ_λ la représentation de $\mathfrak{L}(0_3)$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi^w_0(\alpha_3) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{w/\varepsilon}^{-1} \circ \varphi_{w/\varepsilon}(\alpha_3) \circ f_{w/\varepsilon} \\ \varphi^w_0(\alpha_+) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{w/\varepsilon}^{-1} \circ \varphi_{w/\varepsilon}(\varepsilon \alpha_+) \circ f_{w/\varepsilon} \\ \varphi^w_0(\alpha_-) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{w/\varepsilon}^{-1} \circ \varphi_{w/\varepsilon}(\varepsilon \alpha_-) \circ f_{w/\varepsilon}\end{aligned}\tag{XIV.26}$$

avec

$$f_{\lambda}(z) = z^{\lambda} \quad (\text{XIV.27})$$

C'est une contraction d'une famille de représentations dans une autre, analogue au procédé usuel d'Inonü-Wigner, mais où on a effectué en plus un "sauvetage" particulier, en utilisant une transformation f_{λ} singulière à la limite $\varepsilon = 0$.

XV - REMARQUES SUR L'INTEGRABILITE DES REPRESENTATIONS DEFORMEES

Nous n'avons parlé jusqu'à présent que de représentations d'algèbres de Lie sans nous préoccuper de savoir si ces représentations fournissaient ou non une représentation d'un groupe de Lie correspondant à l'algèbre. Néanmoins la question de l'intégrabilité est importante, et pas seulement pour des raisons mathématiques, comme l'ont montré les récentes discussions sur le théorème de O'Raighfairtaigh (Cr. Chapitre XVI).

En ce qui concerne les déformations, on peut se poser le problème suivant :

Supposons que l'on déforme un couple G, φ où φ est une représentation intégrale de l'algèbre de Lie G ; soit G_t, φ_t la déformation. A quelles conditions la représentations déformée est-elle encore intégrable?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser les résultats de NELSON sur les vecteurs analytiques, et ceux de KATO sur la stabilité des caractères "auto-adjoints" ou "essentiellement auto-adjoints" pour certains opérateurs.

Soit G un groupe de Lie et H un espace de Banach. Par représentation T de G , on entend dans la suite un homomorphisme de G dans l'ensemble des opérateurs bornés de domaine H , vérifiant $T(e) = I$ (identité sur H), et tels que $\forall x \in H, \sigma \mapsto T(\sigma)x$ soit une application fortement continue de G dans H (H est muni de la topologie de la norme). La représentation est unitaire si H est un espace de Hilbert et si chaque $T(\sigma)$ est un opérateur unitaire.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G . A tout élément $X \in \mathfrak{g}$ correspond un sous-groupe à un paramètre e^{tX} de G .

Il est facile de voir comment la question des domaines intervient dans la construction des représentations de l'algèbre de Lie, obtenues à partir de celles du groupe; en effet la représentation de $\mathfrak{g}$ est définie par :

$$dT(X) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(e^{tX}) - I}{t} v \quad v \in H \quad (XV.1)$$

donc sur l'ensemble des vecteurs v tels que la limite précédente existe pour tous les $X \in \mathfrak{g}$.

Une solution est fournie par le théorème de Gårding.

Définition 1 : le domaine de Gårding $\mathcal{D}$ est l'ensemble des éléments v de l'espace de Banach H obtenus de la façon suivante : $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $u \in H$.

$$v = T(\varphi) u = \int_G T(g) u \varphi(g) dg$$

Ce domaine est dense dans H .

Théorème : Toute représentation fortement continue d'un groupe de Lie $G : g \rightarrow T(g)$ induit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , définie par la formule (XV.1), quand v appartient au domaine de Gårding de la représentation.

On peut ^{sont} construire d'autres domaines denses dans H . Les résultats suivants sont importants pour le problème réciproque de l'intégrabilité d'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 2 : Vecteur analytique pour une représentation.

Un vecteur $x \in H$ est un vecteur analytique pour la représentation T si l'application $\sigma \rightarrow T(\sigma)x$ de G dans H est analytique.

Définition 3 : Vecteur analytique d'un opérateur A sur un espace de Banach H .

$x \in H$ est un vecteur analytique pour A , s'il existe $s > 0$ tel que la série suivante converge :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| A^n x \| s^n < \infty$$

Théorème 1[N] : Soit T une représentation unitaire du groupe de Lie G sur l'espace de Hilbert H . Alors l'ensemble des vecteurs analytiques pour T est dense dans H .

Soient $X_1, X_2 \dots X_d$ une base de l'algèbre de Lie du groupe G , ayant un domaine commun $\mathcal{D}$, et soit $\Delta = \sum X_i^2$. Alors tout vecteur analytique pour $T(\Delta)$ est un vecteur analytique pour T , et l'ensemble de ces vecteurs est dense dans H^* .

Après avoir montré que l'existence d'un ensemble dense de vecteurs analytiques assure l'intégrabilité de la représentation, Nelson arrive à l'important théorème suivant :

Théorème 2 [N] : Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie réelle d'opérateurs anti-symétriques sur un espace d'Hilbert $\mathcal{K}$ ayant un domaine commun $\mathcal{D}$ qui est un sous espace linéaire dense dans $\mathcal{K}$. Soit $X_1 \dots X_d$ une base de $\mathcal{L}$, $\Delta = \sum_{i=1}^d X_i^2$. Il existe sur $\mathcal{K}$ une représentation unitaire U du groupe de

* La notation $\overline{A}$ signifie la fermeture de l'opérateur A défini sur un domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{K}$. Rappelons que $\overline{A}$, quand elle existe, est définie sur un domaine $\mathcal{D}(\overline{A}) \supset \mathcal{D}(A)$ formé de deux vecteurs x limite d'une suite de vecteurs x_j dans $\mathcal{D}(A)$, tels que Ax_j ait une limite y dans $\mathcal{K}$. Dans ce cas $\overline{A} x = y$.

Lie simplement connexe G ayant $\mathcal{G}$ comme algèbre de Lie telle que, $\forall X \in$

$$\overline{U(X)} = \overline{X}$$

si et seulement si :

Δ est essentiellement self adjoint sur $\mathcal{D}$.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

Soit $\mathcal{G}, \varphi_0$ un couple formé d'une algèbre de Lie réelle $\mathcal{G}$, et d'une représentation de $\mathcal{G}$ par des opérateurs antisymétriques définis sur un domaine commun $\mathcal{D}$, dense dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, domaine que nous supposerons de plus invariant.

Soit $(\mathcal{G}_t, \varphi_t)$ une déformation de $(\mathcal{G}, \varphi_0)$ où φ_t est également formée d'opérateurs antisymétriques : Nous supposerons également que le domaine de φ_t contient le domaine de φ_0 (ce qui sera réalisé en pratique pour toutes les déformations ayant lieu dans l'algèbre enveloppante de φ_0).

Supposons la représentation initiale φ_0 intégrable, c'est-à-dire telle qu'elle conduise à une représentation unitaire U du groupe G simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, et considérons l'opérateur de Nelson Δ correspondant (défini dans la théorie 1). Alors $\varphi_0(\Delta)$ est essentiellement self-adjoint sur $\mathcal{D}$.

Considérons l'opérateur de Nelson Δ_t associé à la déformation $(\mathcal{G}_t, \varphi_t)$. L'intégrabilité de φ_t se ramène à l'examen des conditions de validité du théorème 2.

Pour cela, on peut utiliser un résultat de Kato sur la stabilité des opérateurs self-adjoints.

Définition 4 : Un opérateur A est relativement borné par rapport à un opérateur T (ou T -borné) si $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(T)$ et $\|Ax\| \leq a \|x\| + b \|Tx\|$ $x \in \mathcal{D}(T)$

Théorème 3 [Ka] : Soit T un opérateur self-adjoint (respectivement essentiellement self-adjoint).

Si A est symétrique et relativement borné par rapport à T avec $b < 1$, alors $T + A$ est self-adjoint (resp. essentiellement self-adjoint de fermeture $\overline{T + A} = \overline{T} + \overline{A}$).

L'opérateur de Nelson $\varphi_t(\Delta_t)$ s'écrit :

$$\varphi_t(\Delta_t) = \varphi_0(\Delta_0) + t A_t$$

où par hypothèse le domaine de A_t contient celui de $\varphi_0(\Delta_0) = \mathfrak{D}$.

Si A est relativement borné par rapport à $\varphi_0(\Delta_0)$, en multipliant par t , on pourra toujours vérifier la condition du théorème 3 de Kato, au moins dans un certain domaine $t \leq t_0$, et par conséquent l'opérateur de Nelson sera dans ce cas essentiellement self-adjoint.

Ainsi, l'intégrabilité de la représentation φ_t est assurée dès que l'opérateur A_t est relativement borné par rapport à $\varphi_0(\Delta_0)$.

Application à l'intégrabilité des représentations de $O(m,1)$ obtenues par déformation des représentations de l'algèbre du groupe euclidien $E(m)$ [D.M.].

Les représentations de l'Euclidien (algèbre de Lie) peuvent se réaliser sur l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide $\mathcal{S}$ dense dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur une sphère dans un espace de dimension m . Cet espace $\mathcal{S}$ est invariant par l'algèbre.

Les relations de commutation pour $E(m)$ sont avec des générateurs antisymétriques :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} M_{\rho\mu}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

avec $g_{\mu\mu} = +1$, $\mu = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \text{Notons la représentation } \varphi_0 \text{ par : } \quad \varphi_0(P_\mu) &= P_\mu \\ \varphi_0(M_{\mu\nu}) &= M_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$P^2 = \sum_\mu (P_\mu^2)$ est dans le centre de φ_0 .

Il est connu qu'une déformation de φ_0 dans le corps enveloppant de φ_0 conduit à une représentation de $O(m+1)$ ou $O(m,1)$ suivant la nature du paramètre de déformation.

$$\text{Posons } \varphi_t(P_\mu) = P_\mu + \frac{t\sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{p^2}} [M_{\rho\nu} M^{\rho\nu}, P_\mu]$$

$\varepsilon = +1$ correspond à une représentation de $O(m+1)$ (*)

$\varepsilon = -1$ correspond à une représentation de $O(m,1)$

Considérons seulement la déformation dans des opérateurs antihermitiques, donc dans $O(m,1)$. En effet, dans ce cas l'opérateur de Nelson Δ est symétrique. Pour l'algèbre déformée $O(m,1)$: (Δ_t est également symétrique)

$$\Delta_t = \Delta + t^2 X$$

$$\text{avec } X = -\left[\frac{1}{4} (m)^2 + \frac{1}{p^2} P^\mu P^\nu S_{\mu\nu}\right]$$

$$\text{ou } S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (M_{\mu\alpha} M^\alpha_\nu + M_{\nu\alpha} M^\alpha_\mu)$$

Le domaine de définition de X contient $\mathcal{F}$ qui était invariant par l'algèbre initiale.

(*) Conclusions opposées à celles de Rosen.

Nous devons donc seulement vérifier que X est relativement borné par rapport à Δ .

Il est clair d'abord que l'opérateur $\frac{P^\mu P^\nu}{P^2}$ est borné. (En effet $2P_\mu P_\nu \leq P_\mu^2 + P_\nu^2$ d'où $P_\mu P_\nu \leq \vec{P}^2$).

Il suffit donc de montrer que $S_{\mu\nu}$ est relativement borné par rapport à Δ . Dans ce cas $A S_{\mu\nu}$ où A est borné est aussi relativement borné par rapport à Δ .

Or ceci résulte d'une propriété de "domination" dans l'algèbre enveloppante d'ordre 2, démontrée par Nelson.

Soit B un élément de A_2 (algèbre enveloppante d'ordre 2), alors $\exists k < +\infty$ tel que :

$$\| Bx \| \leq k \| (\Delta - I) x \|$$

En prenant $S_{\mu\nu} = B$, on voit que les conditions de Kato sont vérifiées. La représentation obtenue de $O(m,1)$ est donc intégrable. (Ce résultat est attendu puisque la partie compacte de $O(m,1)$, est la même que celle de $E(m)$).

Remarquons que la métrique a joué un rôle important : ce résultat ne s'applique pas si l'on part d'un groupe inhomogène $IO(p,q)$ au lieu du groupe $E_m = IO(m+1)$.

RESUME DES PRINCIPAUX RESULTATS MATHEMATIQUES

DEFORMATION CONVERGENTE [N.Ri] D'ALGEBRES DE LIE

DEFORMATION FORMELLE [G] D'ALGEBRES DE LIE

μ est un produit simple de L_n si $H^3(\mu, \mu) = 0$

Condition suffisante de rigidité convergente

$$H^2(\mu, \mu) = 0$$

Pas de conditions d'intégrabilité si $H^3(\mu, \mu) = 0$

Condition suffisante de rigidité formelle :

$$H^2(\mu, \mu) = 0$$

↑ Théorème d'Artin

En particulier

Une algèbre de Lie semi-simple est rigide
Une sous-algèbre de Lie semi-simple est stable par déformation *

CONTRACTIONS D'ALGEBRES DE LIE $[L.N; V]$

Toutes les algèbres dans $\overline{O(\mu)}$ (adhérence de l'orbite de μ) s'obtiennent par des contractions (généralisées) :

$$\mu' = \lim_{t \rightarrow 0} \bar{\varphi}(t) * \mu$$

où $\bar{\varphi}(t)$ est une série entière en t inversible de $GL(V_K)$ quand $t \neq 0$, singulière pour $t=0$

DEFORMATIONS FORMELLES D'ALGEBRES ET DE REPRESENTATIONS : $[L.N]$

Soit φ une représentations de l'algèbres de Lie μ dans un espace W .

Pas de condition d'intégrabilité si

$$\begin{cases} H^3(\mu, \mu) = 0 \\ H^2(\mu, L(W)^\varphi) = 0 \end{cases}$$

Condition suffisante de rigidité du couple (μ, φ) :

$$H^2(\mu, \mu) = 0 \text{ et } H^1(\mu, L(W)^\varphi) = 0$$

Si W est de dimension finie, on a la même application du théorème d'Artin aux déformations convergentes.

* L'algèbre de Lie déformée contient une sous-algèbre isomorphe à la sous-algèbre semi-simple initiale.

T R O I S I E M E P A R T I E

QUELQUES APPLICATIONS

XVI - APPLICATION A LA RECHERCHE DE RELATIONS ENTRE LES

SYMETRIES INTERNES ET LE GROUPE DE POINCARÉ

Les tentatives pour construire un groupe contenant simultanément le groupe de Poincaré et un groupe de symétrie interne, de façon à obtenir un spectre de masse ont rencontré jusqu'à présent de sérieuses difficultés.

Les premiers résultats dans cette voie, dus à W.D. Mc Glinn [Gl] et à O.W. Greenberg [Gr] montraient que dans le cas d'un groupe de symétrie interne semi-simple I , d'algèbre de Lie $\mathfrak{J}$, toute algèbre de Lie combinant $\mathfrak{J}$ et l'algèbre de Lie de Poincaré $\mathcal{P} = T \times \mathcal{L}$, telle que $[\mathfrak{J}, \mathcal{L}] = 0$, est une somme directe $\mathfrak{J} + \mathcal{P}$.

À niveau du groupe, en utilisant la théorie des extensions, Louis Michel a montré le résultat suivant [Mi.1] : si G est un groupe formé du produit I.P. et si $I \cap P = \{e\}$, il suffit qu'il y ait un seul élément du groupe de symétrie interne $s \in I$ tel que $p s p^{-1} \in I \forall p \in P$, pour que G soit un produit semi-direct $G = S \ltimes P$ (S sous-groupe invariant, $P \approx G/S$). Avec les conditions générales sur les translations, Michel et Sakita ont montré que l'on ne pouvait avoir qu'un produit direct [Mi.S]. Avec d'autres hypothèses, un théorème analogue est dû à Coleman [Co]. Enfin il faut rappeler le résultat connu sous le nom de théorème de O'Raifeartaigh [O'R], [F.S], [J] qui assure essentiellement : étant donné un groupe de Lie G , connexe contenant le groupe de Poincaré, et $U(g)$ une représentation irréductible unitaire fortement continue de G , alors si l'opérateur de masse $P_\mu P^\mu$ a un point isolé dans son spectre, ce point est tout le spectre.

Comme le montre l'exemple donné par Flato et Sternheimer, il est important pour obtenir ce résultat d'imposer que la représentation de l'algèbre de Lie de G soit intégrable au groupe. En définitive,

pour avoir un " spectre de masse", il faut trouver une représentation de l'algèbre de Lie de G partiellement intégrable, c'est-à-dire qui puisse être intégrée en une représentation du groupe de Poincaré, mais pas du groupe G tout entier [D] [F.S].

La théorie des déformations permet a priori d'essayer une autre solution qui échappe à cette difficulté. Plutôt que de construire un groupe contenant le groupe de Poincaré et un groupe de symétrie interne, on peut chercher s'il existe un groupe qui se contracte dans le produit direct des deux précédents. Son interprétation serait même assez naturelle : le spectre de masse observé (la formule de Gell-Mann Okubo par exemple) correspondrait à la présence d'une certaine interaction caractérisée par un ou plusieurs paramètres; à la limite où cette interaction est supprimée, les masses deviennent identiques et le groupe d'invariance est simplement le produit direct du groupe de Poincaré et du groupe de symétrie interne (SU(3), SU(6),...). Mais nous allons voir que cette méthode conduit également à des résultats négatifs.

Il est d'abord facile d'obtenir toutes les algèbres de Lie qui se contractent dans la somme directe $P + S$ où S est semi-simple. En effet on a le résultat suivant :

Lemme 1 : Soit $\mathcal{G} = P+S$, somme directe de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré et d'une algèbre de Lie semi-simple S . Alors $\dim H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = 1$.

Démonstration : Les translations forment un idéal T de l'algèbre $\mathcal{G}$ à quotient semi-simple. On a donc $[S, H]$:

$$H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = H^2(T, \mathcal{G})^{\mathcal{G}} \quad (\text{XVI.1})$$

Toute 2-cochaîne $f: T \wedge T \rightarrow S+P$ se décompose en $f_S + f_P$ à valeurs respectivement dans S ou P . f_P appartient à $H^2(T, P)^P$ qui est de dimension 1 d'après (Ch. IX). Comme S commute avec T , on a aussi : $Z^2(T, S) = C^2(T, S)$ et $B^2(T, S) = 0$. La seule invariance non triviale est due à $L (=SL(2, C))$:

$f_S \in L(TAT, S)^L$, or en tant que L-module $T \simeq D^{1/2, 1/2}$, $S = D^{0,0}$, or $D^{0,0}$ n'est pas contenu dans le produit $D^{1/2, 1/2} \wedge D^{1/2, 1/2} \otimes D^{0,0}$, d'où $L(TAT, S) = 0$ et $f_S = 0$. Par conséquent, le seul cocycle non trivial est celui que nous déjà rencontré dans le cas de l'algèbre de Poincaré

$$f(P_\mu, P_\nu) = M_{\mu\nu} \quad \dots \quad (XVI.2)$$

Au premier ordre, les seules déformations de $G = P+S$ sont isomorphes aux algèbres suivantes : $0(4,1)+S$ et $0(3,2)+S$.

Ces algèbres sont rigides, (une somme directe d'algèbres semi-simples est rigide), et par conséquent les déformations ultérieures ne donnent rien de plus. Géométriquement, la situation des algèbres $\mathcal{G} = P+S$ est la suivante : si n est la dimension de S , $\mathcal{G}$ appartient à L_{n+10} , c'est un point simple de la variété, la dimension de l'orbite de $\mathcal{G}$ est $(n+10)^2 - (n+10) - 1$, enfin la position de l'orbite est tout à fait analogue à celle de Poincaré, par rapport aux deux algèbres $0(4,1)+S$ et $0(3,2)+S$ (Cf. IX). Résumons ceci :

Les seules déformations de $\mathcal{G} = P+S$ sont $0(4,1)+S$ et $0(3,2)+S$.

Remarque : d'après les résultats de Richardson sur les déformations des sous-algèbres, on savait a priori que les déformations de $\mathcal{G}$ devaient contenir la somme directe $\mathfrak{L} + S$, le seul couplage possible ne pouvant alors venir que des translations : et sous la forme $[P_\mu, P_\nu]_t \in \mathfrak{L}+S$; on vérifie alors immédiatement qu'il n'y a pas d'autres solutions que (XVI.2).

Des résultats analogues ont été démontré récemment par V.D. Lyakhovsky^[L].

Toutefois en ce qui concerne les applications physiques, il faut considérer également les déformations de représentations. Il serait encore possible qu'une déformation d'algèbres $P+S \rightarrow 0(4,1)+S$ s'accompagne d'une déformation de représentations, non triviales au point de vue du couplage souhaité.

On obtient cependant un résultat analogue pour les déformations de représentations de G.

Lemme 2 : On a $\dim. H^1(\mathcal{G}, M) = 1$ pour tout $\mathcal{G}$ -module M, tel que $H^1(S, M) = 0$.
En effet on peut montrer directement que $H^1(\mathcal{G}, M) = H^1(P, M)$, et le lemme 2 résulte du calcul que nous avons fait dans le cas de l'algèbre de Poincaré. (La condition sur M est toujours vérifiée si S est une algèbre de Lie semi-simple complète). D'où :

Quand S est semi-simple et compacte les représentations des algèbres déformées sont obtenues par une déformation triviale sur S, et par une déformation au premier ordre sur Poincaré, qui est celle que nous avons déjà rencontrée au Chapitre XIII :

$$P'_\mu(t) = P_\mu + \frac{it}{2m} [N^2 - M^2, P_\mu] \quad (\text{XVI.3})$$

dans le cas d'une déformation dans $O(3,2)$.

On peut alors essayer d'obtenir une "formule de masse" en imposant que les particules appartiennent à une représentation bien déterminée du groupe $O(3,2) \times S$, ou $O(4,1) \times S$; la valeur de $P'^\mu P'_\mu$ est un invariant $\mathcal{C}$ en fonction duquel on peut calculer $P^\mu P_\mu$. C'est ce qu'a fait A. Böhm [B]. On obtient ainsi une relation entre P^2 , W^2 , et des paramètres $t, \mathcal{C}$. (En général les casimirs de l'algèbre déformée, quand la déformation a lieu dans l'algèbre enveloppante, sont des fonctions des casimirs de l'algèbre initiale). Finalement ce procédé conduit à :

$$M^2 = M_0^2 + \lambda S(S+1)$$

On n'arrive donc pas à obtenir par cette méthode un couplage entre le groupe de Poincaré et le groupe de symétrie interne.

On peut s'attendre toutefois à ce que la déformation se révèle plus fructueuse quand le groupe de départ n'est pas un produit direct, mais un produit semi-direct. C'est ce qui se produit avec les "doubles structures", dont un des premiers exemples comme l'a montré Louis Michel [Mi.3] est fourni par la théorie des surmultiplets de Wigner. Dans ce cas le groupe d'invariance de la théorie est un produit direct : $G' \times U_4$ où G' est isomorphe au groupe de Galilée G agissant sur l'espace-temps, mais le groupe de Galilée "physique" se trouve placé d'une façon diagonale dans le produit, qui est alors un produit semi-direct $G \otimes U_4$. On pourrait étudier alors le problème suivant : trouver toutes les déformations de $\mathcal{G}' + \mathcal{U}_4$, qui comprennent au moins toutes les algèbres de Lie somme directe $X + \mathcal{U}_4$ où X est une déformation de l'algèbre de Lie de Galilée (Ch.X) (et peut être uniquement celle-là) et examiner ce que devient l'algèbre "physique" du groupe de Galilée dans cette déformation; ^{celle-ci} / n'a d'ailleurs pas de raison en général de rester une sous-algèbre.... Nous nous sommes limités ici à une étude analogue dans le cas des "doubles structures" faisant intervenir le groupe de Poincaré, comme on la rencontre par exemple dans le cas du groupe $SL(6, \mathbb{C})$. [Mi.3]

Au niveau des algèbres de Lie, cela signifie que l'algèbre de Lie A du groupe global a la structure suivante

$$A = P \oplus S = P^1 + S$$

P et P^1 sont isomorphes à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré S est l'algèbre de Lie d'un groupe de symétrie interne. De façon générale, O. Fleischman et J.G. Nagel ont montré qu'il n'existait une semblable "double structure" que si S contient L ou P (Lorentz ou Poincaré) [F.N].

Quelles sont alors les déformations possibles de l'algèbre A ? Il suffit d'appliquer les résultats précédents à la somme directe $P^1 + S$: les seules déformations de A sont : $O(4,1)^1 + S$ et $O(3,2)^1 + S$.

Explicitons ceci en prenant un exemple utilisé par Fronsdal[Fr], selon lequel on peut prendre comme algèbre A

$$A = L \boxplus (T \oplus S)$$

T étant l'algèbre des translations, T commute avec S, et S contient une algèbre isomorphe à L, notée $(S_{\mu\nu})$. Les générateurs du groupe P^1 (groupe de Poincaré orbital) sont :

$$\begin{aligned} P_{\mu}^{(1)} &= P_{\mu} \\ L_{\mu\nu}^{(1)} &= L_{\mu\nu} - S_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Les autres générateurs de S sont des scalaires de Lorentz, et commutent avec P. Il en résulte que :

$$A = P^{(1)} \oplus S$$

est un produit direct.

Il est alors visible que la déformation va conduire à un véritable couplage entre le groupe de Poincaré et le groupe de symétrie interne. En effet les nouveaux générateurs P_{μ} , construits à l'aide de la formule (XVI.1), sont des fonctions des générateurs $S_{\mu\nu}$. Supposons alors que les particules appartiennent à une représentation de l'algèbre déformée, ce qui signifie que l'on peut prendre les casimirs de celle-ci comme des constantes. Or exactement comme dans le cas précédent, $P_{\mu}^1 \cdot P^{\mu 1}$ est une constante, en fonction de laquelle on peut exprimer $P_{\mu}^1 \cdot P^{\mu 1}$. On obtient donc un résultat semblable :

$$M_{\mu}^2 = M_0^2 + \lambda S^1(S^1+1)$$

mais où S^1 est le spin orbital lié à P^1 . Toutefois toutes les théories usuelles avec $SU(6)$ sélectionnent les représentations de A où justement : $W_{\mu}^1 = W_{\mu} - W_{\mu} = 0$, soit $S^1 = 0$.

La conclusion de ceci est donc encore un résultat négatif : par déformation d'une double structure, dont les représentations sont sélectionnées de la manière habituelle, on n'obtient pas de spectre de masse.

Les deux chapitres suivants (XVII) et (XVIII) reposent sur le même principe : par déformation, on peut entreprendre le calcul purement algébrique de certaines contraintes correspondant à une théorie relativiste quand on part d'une théorie non relativiste. On justifie ainsi une idée fort simple de perturbation, que Foldy avait déjà en fait mise en oeuvre en 1961, dans un article sur la possibilité de décrire de façon covariante un système de n particules [F]. Ainsi dans cet article, Foldy cherche à construire un hamiltonien relativiste par déformation (en $1/c^2$) du cas non relativiste (sous certaines hypothèses sur l'interaction), ce qui le conduit à chercher quelles sont les interactions, et les conditions en particulier de "séparabilité" qui permettent de réaliser une représentation de l'algèbre de Lie de Poincaré, par déformation d'une représentation de l'algèbre de Lie de Galilée.

C'est exactement la même idée que nous appliquerons dans deux cas très simples :

- 1) à la recherche d'un opérateur position relativiste (Ch.XVII)
- 2) à des conditions sur le potentiel auquel peut être soumise une particule avec une hypothèse de groupe dynamique (Ch.XVIII).

Enfin, ces exemples sont loin de représenter les seules applications possibles comme le montrent, de façon plus ou moins explicites les références suivantes : [C.G.S.] [W.T.], [L.P.W], [B2] [C2].

XVII - REMARQUES SUR L'OPERATEUR POSITION

Le problème de la construction d'un opérateur position en mécanique quantique relativiste soulève encore un certain nombre de discussions ; on en connaît l'origine : la solution donnée par T.D. Newton et E.P. Wigner en 1949 conduit à des opérateurs qui n'ont pas de propriétés de transformations simples (de covariance) par rapport aux transformations de Lorentz. Par contre, ils sont déterminés de façon unique sous des hypothèses assez générales qui assurent en particulier que ces opérateurs commutent entre eux $[N.W]$, $[G]$, $[W]$.

D'autres définitions des opérateurs position ayant des propriétés covariantes de transformation ont été proposées (centre de masse de Pryce, de Shirokov, opérateur défini par Chakrabarti $[C]$, ou encore récemment par Fleming $[Fl]$, etc...)* Bien qu'en général différents entre eux, ces opérateurs ont tous une caractéristique commune : ils ne commutent pas entre eux, et conduisent donc à une certaine non localité.

Nous allons voir que la théorie des déformations permet de rendre compte de façon simple de la contradiction entre les deux propriétés suivantes : la propriété de commutativité des opérateurs de position et celle de "transformations relativistes" (transformations en tant que quadrivecteurs).

On sait bien définir un opérateur position dans la théorie non relativiste : c'est simplement l'opérateur multiplication par x .

Si l'on veut construire un quadrivecteur V_μ qui représente un opérateur position relativiste, on doit donc exiger qu'à la limite non relativiste la partie 3-vectorielle $\vec{V}$ tende vers $\vec{x}$. On peut alors chercher ce quadri-vecteur sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_i &= x_i + \frac{1}{c} \frac{1}{2} x_i^1 + \frac{1}{c} \frac{1}{4} x_i^2 + \dots \\ V_0 &= A + \frac{1}{c} \frac{1}{2} A^1 + \frac{1}{c} \frac{1}{4} A^2 + \dots \end{aligned} \tag{XVII.1}$$

*On trouvera une bibliographie importante dans les articles cités.

Afin de mettre en évidence les propriétés de la limite non relativiste, nous exprimerons les générateurs de l'algèbre de Lorentz comme des déformations de celle de Galilé homogène. C'est-à-dire en utilisant les notations du chapitre X :

$$\begin{aligned} \underline{K}_1 &= K_i + \frac{1}{c^2} K_i^1 + \frac{1}{c^4} K_i^2 + \dots \\ \underline{J}_1 &= J_1 \end{aligned} \quad (\text{XVII.2})$$

Conformément aux résultats généraux sur les sous-algèbres semi-simples il est inutile de déformer la partie rotation.

Les relations de commutation d'un quadrivecteur sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [\underline{K}_i, V_J] &= i \delta_{ij} \frac{V_0}{c} \\ [\underline{K}_1, V_0] &= i V_i \end{aligned} \quad (\text{XVII.3})$$

Nous n'écrivons pas les relations de commutation avec J_i . A la limite non relativiste, ces relations deviennent :

$$\begin{aligned} [K_i, x_j] &= 0 \\ [K_1, A] &= i x_i \end{aligned} \quad (\text{XVII.4})$$

Nous devons donc partir d'un A qui a la forme suivante (en utilisant l'expression explicite de l'opérateur $K_i = M x_i$ (L.L)) (*)

$$A = \frac{1}{2M} (x.p + p.x) + \varphi(x)$$

Pour simplifier commençons par prendre $\varphi = 0$; nous allons voir que dans ce cas il est possible de trouver une solution pour V à tous les ordres.

(*) Nous considérons ici le cas d'une représentation de spin nul.

Au premier ordre, c'est-à-dire à l'ordre $\frac{1}{c^2}$, les relations (XVII.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} [K_i, x_j^1] + [K_i^1, x_j] &= i \delta_{ij} A \\ [K_i, A^1] + [K_i^1, A] &= i x_i^1 \end{aligned} \quad (\text{XVII.6})$$

En utilisant l'expression connue de $K_i^1 = \frac{1}{2M} P^2 x_i$, on obtient facilement une solution du système précédent :

$$\begin{aligned} x_i^1 &= -\frac{i}{2M^2} P_i + \frac{1}{4M^2} \{(\vec{P} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{P}), P_i\} \quad (*) \\ A^1 &= \frac{1}{8M^3} \{\vec{P}^2, \vec{P} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{P}\} - \frac{i}{2M^3} \vec{P}^2 \end{aligned}$$

La relation de commutation s'écrit au premier ordre :

$$[x_i, x_j^1] + [x_i^1, x_j] = \frac{i}{M^2} (P_j x_i - P_i x_j) \quad (\text{XVII.7})$$

par conséquent ces opérateurs ne commutent pas.

Ainsi dès le premier ordre on voit apparaître l'incompatibilité entre les propriétés de commutation et les propriétés de covariance pour des opérateurs conduisant à l'opérateur de position x_i à la limite non relativiste.

Obtention d'une solution générale des équations (XVII.4):

Au deuxième ordre ces équations deviennent .

$$\begin{aligned} [K_i, x_j^2] + [K_i^1, x_j^1] + [K_i^2, x_j] &= i \delta_{ij} A^1 \\ [K_i, A^2] + [K_i^1, A^1] + [K_i^2, A] &= i x_i^2 \end{aligned} \quad (\text{XVII.8})$$

(*) $\{A, B\} = AB + BA$

Avec $K_i^2 = -\frac{1}{8M^3} P^4 x_i$, et avec la solution précédente pour x_i^1 et A^1 , la première relation devient simplement : $[x_i^1, x_j^2] = 0$. Le choix $x_i^2 = 0$ conduit alors à la solution suivante pour A_2 :

$$A_2 = -\frac{1}{32M^5} \{P^4, \vec{P} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{P}\} + \frac{i}{4M^5} \vec{P}^4 \quad (\text{XVII.9})$$

Le même phénomène se reproduit au troisième ordre, etc... Finalement, on obtient une solution générale (*) avec $x_i^2 = x_i^3 = \dots = 0$:

$$\begin{aligned} V &= x + \frac{1}{2M^2 c^2} \vec{P} \cdot (\vec{P} \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{P}) \\ V_0 &= \frac{1}{2M^2 c^2} P_0 (\vec{P} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{P}) \quad P_0 = \sqrt{\vec{P}^2 c^2 + M^2 c^4} \end{aligned} \quad (\text{XVII.10})$$

Si l'on était parti d'une représentation générale quelconque de Galilé (de spin non nul), il est facile de voir que les calculs en fonction cette fois des générateurs de l'algèbre de Galilée, conduisent au même résultats que (XVII.10) exprimé en fonction des générateurs de Lorentz, c'est-à-dire à :

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2M^2} (\vec{P} \cdot \vec{K} + \vec{K} \cdot \vec{P}) \\ V_i &= \frac{1}{2M^2 c^2} (P_0 K_i + K_i P_0 + \varepsilon_{ijk} (P_j J_k + J_k P_j)) \end{aligned}$$

On peut vérifier directement que cette solution est hermitique par rapport au produit scalaire relativiste. Les relations de commutations de ces opérateurs sont celles de l'algèbre de De Sitter :

$$[V_\mu, V_\nu] = \frac{1}{M^2 c^2} i M_{\mu\nu}$$

En effet, sous leur forme non symétrisée, on reconnaît l'expression des générateurs de De-Sitter $O(4,1)$ en fonction de l'algèbre enveloppante de Poincaré.

(*) ces opérateurs sont hermitiques par rapport au produit scalaire de K.G

Ces opérateurs "position" ne sont pas nouveaux : ils sont identiques à ceux de Shirokov, ou encore à l'expression covariante que l'on peut obtenir à partir des centres de masse de Synge ou Pryce (Cf. Chakrabarti)[C].

La propriété (7), c'est-à-dire la propriété de non-commutation des V_i est indépendante des choix particuliers que nous avons faits. Ainsi, dans le cas du spin nul, la solution générale du système (6) correspondant à une fonction $\varphi \neq 0$ est :

$$\begin{aligned} X_i'^1 &= X_i^1 + \frac{1}{2M} \{ \varphi(x), P_i \} \\ A'^1 &= A^1 + \frac{1}{4M^2} \{ \varphi(x), P^2 \} + C(x) \end{aligned}$$

où x_i^1 et A^1 sont les solutions données précédemment dans le cas $\varphi = 0$. Il est facile de vérifier alors que la relation (XVII.7) est inchangée.

XVIII - DEFORMATION DEPENDANT DE DEUX PARAMETRES

CONSTRUCTION D'UN "GROUPE DYNAMIQUE"

Un exemple est fourni par les déformations de l'algèbre de Galilée et de ses représentations. En effet, une première déformation correspond au passage non-relativiste -relativiste, et le paramètre de déformation peut être pris égal à $\frac{1}{c}$. C'est le passage de l'algèbre de Galilée à celle de Poincaré dont on connaît bien l'expression au niveau des générateurs de l'algèbre de Lie. Pour simplifier, prenons le cas d'une seule particule : les algèbres précédentes caractérisent une particule libre, relativiste ou non. Supposons maintenant que l'introduction d'une interaction extérieure (d'un potentiel extérieur), qui perturbe les générateurs de l'algèbre, l'Hamiltonien en particulier, leur conserve cependant une structure d'algèbre de Lie (hypothèse d'un groupe dynamique). Nous avons alors à faire à une deuxième déformation de l'algèbre de Galilée et de ses représentations, que l'on peut caractériser par un paramètre g représentant la constante de couplage de l'interaction.

Quelles sont alors les déformations possibles de l'algèbre de Galilée?

D'après les résultats sur les déformations dépendant de deux paramètres, l'algèbre déformée résultante peut être aussi considérée comme une composition de deux déformations successives. En prenant comme première déformation celle qui conduit à l'algèbre de Poincaré, le résultat est donc une déformation (en g cette fois) de l'algèbre de Poincaré. Mais nous savons que les déformations de celle-ci sont très limitées : en dehors de la déformation triviale, on ne peut obtenir que les algèbres de De Sitter $O(4,1)$ et $O(3,2)$.

Par conséquent, les déformations dépendant des deux paramètres g et $\frac{1}{c}$ de l'algèbre de Galilée peuvent seulement être choisies par les algèbres suivantes :

- a) algèbre de Poincaré
- b) algèbres de De Sitter.

Dans la suite nous allons examiner les conséquences du choix b), plus précisément nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse : la composition des deux déformations (g , et $\frac{1}{c}$) conduit à l'algèbre de non-invariance $O(4,1)$ ou $O(3,2)$.

(Cette hypothèse présente par ailleurs certaines analogies avec les groupes de non-invariance "usuels", en particulier $O(4,1)$ pour l'atome d'hydrogène).

Le choix a) se traiterait exactement de la même façon et conduit à des résultats analogues.

Il est alors facile de voir que l'algèbre déformée est de la forme suivante :

$$[P_i, P_j] = \frac{g}{c^2} i \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$[P_i, H] = g i K_i$$

$$[K_i, P_j] = \frac{1}{c^2} i \delta_{ij} H \quad (\text{XVIII.1})$$

$$[K_i, H] = i P_i$$

$$[K_i, K_j] = -\frac{1}{c^2} i \varepsilon_{ijk} J_k$$

On obtient $O(4,1) \forall g > 0$, et $\frac{1}{c^2} \neq 0$; $O(3,2)$ si $g < 0$ si g est infini (interaction seule) on reconnaît les algèbres de Newton

N- et N+ respectivement et si g est nul, on retrouve bien sûr l'algèbre de Poincaré.

Intérêt d'un tel groupe dynamique

Il peut permettre de démontrer l'existence d'un nombre infini d'états liés, si l'on en connaît au moins un, et de calculer de façon approchée les différentes énergies.

Supposons par exemple le cas $g < 0$ ($0(3,2)$), on peut poser :

$$Y_i^+ = P_i^+ + i K_i, \text{ avec } g = -\lambda^2$$

$$[Y_i^-, Y_j^-] = 0$$

$$[Y_i^+, Y_j^+] = 0$$

$$[Y_i^+, Y_j^-] = -2i \frac{\lambda^2}{c^2} \varepsilon_{ijk} J_K + 2i \frac{\lambda}{c^2} \delta_{ij} H$$

$$[Y_i^-, H] = -Y_i^+$$

Soit Ψ_α un état propre de H correspondant à la valeur propre E_α . Alors

$$H(Y_i^+ \Psi_\alpha) = (E_\alpha + \lambda)(Y_i^+ \Psi_\alpha)$$

On peut chercher une déformation explicite des représentations de Galilée (toujours en gardant fixe la partie rotation) sous la forme :

$$K_i' = K_i + g K_i^1_0 + \frac{1}{c^2} K_i^0_1 + \frac{g}{2} K_i^1_1 + \dots$$

$$P_i' = P_i + g P_i^1_0 + \frac{1}{c^2} P_i^0_1 + \frac{g}{2} P_i^1_1 + \dots \quad (\text{XVIII.2})$$

$$H' = M_{c^2} + H + g H^1_0 + \frac{1}{c^2} H^0_1 + \frac{g}{2} H^1_1 + \dots$$

(On utilise la même notation que dans la première partie (IV.4) X^α_β signifie : ordre α en g , ordre β en $\frac{1}{c^2}$ donc ordre total $\alpha+\beta$).

On utilise aussi les expressions des générateurs de Galilée donnés dans [LL]. $K_i = M R_i$ en particulier.

H' est connu, on a :

$$\begin{aligned} H &= H_0^0 = \frac{P^2}{2M} \\ H_0^1 &= V \\ H_1^0 &= - \frac{\vec{P}^2}{8M^3} \\ H_1^1 &= \frac{1}{2M^2} \frac{1}{R} \frac{dV}{dR} (\vec{S} \cdot \vec{L}) + \frac{1}{8M^2} \Delta V \end{aligned} \quad (XVIII.3)$$

en prenant pour H_1^1 l'expression habituelle (cf. par exemple le livre de Messiah).

A partir de (XVIII.1) et (XVIII.3), on peut déterminer les solutions possibles pour K' et P' , mais on trouve en plus des conditions sur V . En général les X_1^0 sont connus, puisqu'ils correspondent à l'algèbre de Poincaré:

$$\begin{aligned} K_i^0 &= \frac{R_i P^2 + P^2 R_i}{4M} - \frac{1}{2M} (S \times P)_i \\ P_i^0 &= 0 \end{aligned} \quad (XVIII.4)$$

On calcule facilement les X_0^1 (déformation dans les algèbres de Newton) :

$$\begin{aligned} P_i^1 &= [A, P_i] \\ K_i^1 &= M [A, R_i] \\ H_0^1 &= - \frac{1}{2} M R^2 + [A, \frac{P^2}{2M}] + \Psi(P) \end{aligned} \quad (XVIII.5)$$

A est une fonction quelconque de R et P .

Ce qui donne une condition sur V en comparant avec (XVIII.3), il doit

exister A tel que :

$$V = -\frac{1}{2} MR^2 + [A, \frac{P^2}{2M}] \quad \text{et } \Psi(P) = 0 \quad (\text{XVIII.6})$$

Explicitons les calculs au deuxième ordre ($\frac{g}{c^2}$); nous avons d'après (XVIII.1) les premières conditions :

$$[K_i^1, K_j^1] + [K_i^1, K_j^1] + [K_i^1, K_j^0] + [K_i^0, K_j^1] = 0 \quad (\text{XVIII.7})$$

$$[K_i^1, P_j^1] + [K_i^1, P_j^1] + [K_i^1, P_j^0] + [K_i^0, P_j^1] = i \nabla_{ij} \quad (\text{XVIII.8})$$

dont la solution est :

$$K_i^1 = [B, R_i] + [A, K_i^0] \quad B = B(R, P) \quad (\text{XVIII.9})$$

$$P_i^1 = \frac{1}{M} [B, P_i] + \frac{VP_i + P_i v}{2M} - \frac{1}{4M^2} \{[A, P^2], P_i\} + \varphi_i(R, S) \quad (\text{XVIII.10})$$

Si l'on tient compte de (XVIII.6), (XVIII.10) s'écrit :

$$P_i^1 = \frac{1}{M} [B, P_i] - \frac{1}{4} \{R^2, P_i\} + \varphi_i(R, S) \quad (\text{XVIII.11})$$

Les relations (XVIII.1) imposent aussi :

$$[K_i^1, \frac{P^2}{2M}] + [K_i^0, -\frac{P^4}{8M^3}] + [K_i^0, V] + M [R_i, H^1] = i P_i^1 \quad (\text{XVIII.12})$$

$$[P_i^1, P_j^1] + [P_i^1, P_j^1] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad (\text{XVIII.13})$$

(car $P_i^0 = 0$)

$$[P_i^1, \frac{P^2}{2M}] + [P_i^1, H^1] + [P_i^1, -\frac{P^4}{8M^3}] = i K_i^0 \quad (\text{XVIII.14})$$

Compte tenu des résultats précédents, on obtient :

$$\left[\frac{B}{2M} + \frac{1}{64} \{R^2, [R^2, P^2]\} - \frac{1}{8M^2} \{A, P^2\}, P^2 \right] = M H_1^1 \quad (\text{XVIII.15})$$

$$P_i \frac{1}{1} = - \frac{P_i R^2 + R^2 P_i}{4} - \frac{1}{2} (S_x R)_i + \frac{1}{M} [B, P_i] \quad (\text{XVIII.16})$$

H_1^1 d'après (XVIII.6) se met sous la forme $[C, P^2]$ et par conséquent, A étant arbitraire, on peut trouver B vérifiant (XVIII.15) et donc l'expression de tous les générateurs pour les ordres $g, \frac{1}{c^2}$ et $\frac{g}{c^2}$. La seule restriction qui est très forte est que le potentiel se mette sous la forme (XVIII.6).....

Une liste systématique des potentiels vérifiant (XVIII.6) semble difficile à donner. On peut vérifier que le potentiel $V = R^2$ se met sous cette forme (et satisfait donc bien au moins aux ordres que nous avons indiqués, l'hypothèse d'un groupe de non-invariance $O(3,2)$ ou $O(4,1)$). De même les potentiels $\frac{1}{2n+1}$ avec $n>1$ se mettent sous cette forme. (Il suffit de le vérifier pour $\frac{1}{R^3}$ or

$$\frac{2i}{R^3} = \left[\frac{1}{R} (R.P+i) \frac{1}{L^2}, P^2 \right] \text{ avec } L^2 = R^2 P^2 - (R.P)^2 + i(R.P) = (\vec{R} \times \vec{P})^2]$$

Par contre $\frac{1}{R}$ ne semble pas pouvoir s'exprimer ainsi.

APPENDICE A^{*}

$\mu = ([,], V)$ est une algèbre de Lie, dont la loi est notée $[x, y]$, $x, y \in V$. Soit M un μ -module, on utilise la notation :

$$m \in M, x \in \mu \rightarrow x.m \in M$$

$C^p(\mu, M)$ dénote l'espace des applications p linéaires et alternées de $V \times V \times \dots \times V$ dans M .

La formule générale donnant l'application cobord δ est :

$$\begin{aligned} f \in C^p(\mu, M) &\rightarrow \delta f \in C^{p+1}(\mu, M) \\ \delta f(x_1 \dots x_{p+1}) &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{p+1}) \\ &+ \sum_i (-1)^{i-1} x_i . f(x_1, \dots, \hat{x}_i \dots x_{p+1}) \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\text{On a } \delta^2 = \delta \circ \delta = 0$$

Explicitons d'abord cette formule pour $p = 0, 1, 2$.

$$p = 0 \quad C^0(\mu, M) \equiv M$$

$$f \in M$$

$$\delta f(x) = x.f \quad (A.2)$$

$$p = 1 \quad f \in C^1(\mu, M) :$$

$$\delta f(x, y) = x.f(y) - y.f(x) - f([x, y]) \quad (A.3)$$

* Cf. [S.L.]

$$p = 2 \quad f \in C^2(\mu, M)$$

$$\delta f(x, y, z) = \sum_{\wp(x, y, z)} x \cdot f(y, z) - \sum_{\wp(x, y, z)} f([x, y], z) \quad (A.4)$$

$\wp(x, y, z)$ = permutation circulaire de x, y, z .

1) Prenons comme μ -module, l'espace vectoriel V muni de la représentation adjointe. Les formules suivantes interviennent donc pour le calcul de la cohomologie $H(\mu, \mu)$:

$$p = 0 \quad f \in \mu \rightarrow \delta y \in C^1(\mu, \mu)$$

$$\delta y(x) = [x, y] \quad (A.5)$$

$$p = 1 \quad f \in C^1(\mu, \mu)$$

$$\delta f(x, y) = [x, f(y)] - [y, f(x)] - f([x, y]) \quad (A.6)$$

(Les 1-cocycles de μ dans μ sont donc les dérivations de μ).

$$p = 2 \quad f \in C^2(\mu, \mu)$$

$$\delta f(x, y, z) = \sum_{\wp(x, y, z)} [x, f(y, z)] - \sum_{\wp(x, y, z)} f([x, y], z) \quad (A.7)$$

2) Soit φ une représentation de μ dans un espace vectoriel W . L'espace $L(W)$ est muni d'une structure canonique de μ -module par :

$$x \cdot \Psi = [\varphi(x), \Psi]_{L(W)} \quad \Psi \in L(W), \quad x \in V \quad (A.8)$$

En effet $[x, y] \cdot \Psi = (x \cdot y - y \cdot x) \cdot \Psi$

Nous notons ce μ -module : $L(W)^\varphi$

$$p = 0 \quad \Psi \in L(W)^\varphi \rightarrow \delta \Psi(x) = [\varphi(x), \Psi] \quad (A.9)$$

$$p = 1 \quad f \in C^1(\mu, L(W))^{\mathfrak{L}}$$

$$\delta f(x, y) = [\varphi(x), f(y)] + [f(x), \varphi(y)] - f([x, y]) \quad (A.10)$$

$$p = 2 \quad f \in C^2(\mu, L(W))^{\mathfrak{L}}$$

$$\delta f(x, y, z) = \sum_{\mathfrak{P}(x, y, z)} [\varphi(x), f(y, z)] - \sum_{\mathfrak{P}(x, y, z)} f([x, y], z) \quad (A.11)$$

Définitions des groupes de cohomologie $H^n(\mu, M)$: (A.12)

Pour tout n , posons :

$$Z^n(\mu, M) = \{f \in C^n(\mu, M) , \delta f = 0\}$$

$$B^n(\mu, M) = \{f \in C^n(\mu, M) ,$$

tels qu'il existe $\mu \in C^{n-1}(\mu, M)$ avec $f = \delta\mu\}$

$\delta^2 = 0$ entraîne que $B^n(\mu, M) \subset Z^n(\mu, M)$.

L'espace de cohomologie est le quotient des espaces vectoriels :

$$H^n(\mu, M) = Z^n(\mu, M)/B^n(\mu, M)$$

Définition des groupes de cohomologie $H^n(\mu, M)^{\mathfrak{L}}$ [H.S] (A.13)

Si μ est un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ (en particulier si $\mu = \mathfrak{L}$), on peut définir une structure du $\mathfrak{L}$ -module sur $C^n(\mu, M)$, pourvu que M soit également un $\mathfrak{L}$ -module.

Notons l.m l'action de $\mathfrak{L}$ sur M , la structure $\mathfrak{L}$ -module sur $C^n(\mu, M)$ est définie par :

$$f \in C^n(\mu, M) , \quad l \in \mathcal{L} , \quad x_1, \dots, x_n \in \mu \quad :$$

$$(l.f)(x_1, \dots, x_n) = l.f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, [l, x_i], x_{i+1}, \dots, x_n)$$

et $l.f \in C^n(\mu, M)$.

Cette action commute avec l'opérateur cobord :

$$d(l.f) = l.df$$

et par conséquent induit une structure de $\mathcal{L}$ -module sur $H^n(\mu, M)$.

On note $H^n(\mu, M)^{\mathcal{L}}$ l'ensemble des éléments de $H^n(\mu, M)$ invariants par $\mathcal{L}$.

REFERENCES DES DEUX PREMIERES PARTIES

(Cf. aussi les références du chapitre XIII)

- [A] M. Artin, On the solutions of analytic equations, *Inventiones Mathematicae*, 5, 4, p.277 (1968)
- [B] Bruhat, Géométrie algébrique élémentaire, Cours donné à l'Institut Henri Poincaré (1964)
- [Be] G. Berendt, On the structure of Contractions of Lie Algebras, Séminaire donné à la rencontre d'Istanbul, Août 1966.
- [B.LL] H. Bacry, J.M. Lévy-Leblond, Possible kinematics, *J. M. P.*, 9, 1605 (1968)
- [Ch] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, (Ch.II), Hermann, Paris 1968
- [D.M] H.D. Doebner, O. Melsheimer,
- On a class of generalised group contraction,
Preprint de l'Inst. für Theor. Phys. Univ. Marburg, Germany ;
- Limitable dynamical group in quantum mechanics,
J. M. P. 9, 1638 (1968)
- [F] F.J. Flanigan, Algebraic geography : varieties of structure constants, *Pac. Jour. Math.* 27, 1, p.71 (1968)
- [G] M. Gerstenhaber,
- *Annals of Math.* 84, N°1,1 (1966) ;
- On the construction of division rings by the deformation of fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 55 (1966) 690-692
(On trouvera des formules explicites de déformation d'une algèbre μ , en fonction de deux dérivations de μ , commutant entre elles).
- [G.M.S] I.M. Gelfand, R.A. Minlos, Z. Ya. Shapiro, Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications", Pergamon Press (1963).

- [H] R. Hermann, Analytic continuation of group representations :
 I - Comm. Math. Phys. 2, p.251 (1966)
 II - " " " 3, p.53 (1966)
 III - " " " 3, p.75 (1966)
 IV - " " " 5, p.131 (1967)
 V - " " " 5, p.157 (1967)
 VI - " " " (1967)
- (Cf. aussi : Lie group for physicists,
 New-York, W.A. Benjamin Inc. 1965)
- [H.P] W.V.D. Hodge and D. PEDOE, Methods of algebraic geometry,
 Cambridge Univ. Press., New-York 1964 (Vol. II)
- [H.S] G. Hochschild and J.P. Serre, Ann. Math. 57, 603 (1953)
- [I] E. Inonü, Group Theoretical concepts and Methods in Elementary
 Particles, F. Gürsey, Ed. (Gordon and Breach, New-York 1965)p.391
- [I.W] E. Inonü, E.P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.
39, p. 510 (1953), 40, n°2, p. 119 (1954)
- [J] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience Pub., New-York 1962,p.11
- [K] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the
 Betti numbers of a complex simple Lie group,
 Amer. J. Math. 81 (1959) 973-1032
- [Ka] T. Kato, Perturbation theory for linear operators,
 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1966 (Ch. V, §4, p.288)
- [L.L] J.M. Lévy-Leblond, J. M. P. 4, 776 (1963),
 Cf. aussi thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, Nov. 1965
- [LN.1] M. Lévy-Nahas, J. M. P. 8, 1211 (1967)
- [LN.2] " " "L'extension du groupe de Poincaré aux
 symétries internes des particules élémentaires",
 Colloque de Gif-sur-Yvette, 1-15 avril 1966
 Edité par le C. N. R. S., 15 quai A. France, Paris 7ème.
- [M] W. Miller, Lie theory and special functions ,
 Math. in Science and Engineering, vol. 43,
 Academic Press, New-York and Londres.
- [Mi] L. Michel, "Lectures in theoretical physics",
 Colorado University Press, Boulder, 1964, Vol. VIIa, p.117.

- [N.] E. Nelson. Analytic vectors. Annals of math.
vol. 70, n°3 p. 572. (1959)
- [N.R1] A. Nijenhuis and R. Richardson. Cohomology and deformations
in graded Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 1-29
- [N.R2] - Deformations of homomorphismes of Lie groups and Lie
algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 175-179
- [N.R3] - Deformations of Lie algebras structures.
J. Math. and Mech. Vol. 17, n°1, 89-105 (1967)
- [R.] J. Rosen and P. Roman. J. Math. Phys. 7, 2072 (1966)
- [Ra.] Rajaona. Thèse de 3ème cycle (mathématique)
Institut Henri Poincaré. 1965
- [Ray.] M. Raynaud. Compt. Rend. Acad. Sci. 258, 2457 (1964);
260, 4391 (1965)
- [Ri.1] R.W. Richardson, Jr. On the rigidity of semi-direct products
of Lie algebras. Pacific J. Math. 22, n°2 p. 339 (1967)
Cf. aussi : - Illinois J. Math. 11, n°1 (1967)
- Annals of Math. 86, n°1, 1 (1967)
- [Ri.2] S. Page, R.W Richardson, Jr. Stable subalgebras of Lie
algebras and associate algebras.
- [Ro.] D. Robinson. Helv. Phys. Acta 35, 98 (1962).
- [S.] R. Shaw.
- Zero-mass and nondecomposable representations
Nuovo Cimento 37, n°3, 1086 (1965)
- Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group.
Nuovo Cimento 34, n°4, 1074 (1964).
- [Sa.] E.J. Saletan. J. Math. Phys. 2, 1 (1961).
- [Se.] I. Segal. Duke Math. Jour. 18, 221, (1951)
- [Sh.] W.T. Sharp. Thesis, Princeton Univ. (1960)
- [S.L.] Séminaire Sophus-Lie. E.N.S. 1954/55.
- [V.] M. Vergne. Thèse du 3ème cycle.
Institut Henri Poincaré. Paris 1966.
- Réductibilité des algèbres de Lie nilpotentes.
Acad. Sci. Paris, t.263, P.6-4 (4 juillet 1966)
- Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes
C.R. Acad. Sci. Paris t.267, p.867-870 (4 décembre 1968)

- [V.W.] Van Der Waerden. Modern Algebra Vol. 1
Frederik Ungar Co., New-York 1950.
- [W.] A. Weil. Foundations of algebraic geometry.
Published by American Mathematical Society (1962) chap.IV.
- [We.] S. Weinberg. Feynman rules for any spin.
Massless particles. Phys. Rev. 34,B 882 (1964)
- [Wh.] H. Whitney. On singularities of mappings of Euclidean spaces.I.
mappings of the plane into the plane.
Annals of Math. 62, n°3, nov. 1955, p. 374.
- On singularities of mappings of Euclidian spaces.
Symposium International de topologia algebraica.
Mexico 1958, p. 285.
- [Z.S] O. Zariski, P. Samuel. Commutative algebra. Vol. 2.
D. Van Nostrand Company, INC. (Princeton, New-Jersey, London).

REFERENCES DE LA TROISIEME PARTIE

- [B1] A. Böhmer, Phys. Rev. 145, 1212 (1966)
Cf. aussi A.O. Barut et A. Böhmer, Phys. Rev. 139, 1107 (1965)
- [B2] A. Böhmer, an associative algebra in the problem of mass formulas, J.Math. Phys. 8, 1611 (1967)
- [C] A. Chakrabarti, J. M. P. 4, 10, 1223-1228 (1963)
- [C2] A. Chakrabarti, Déformation de certaines classes de représentations de $U(n)$ et $U_0(n)$ dans $U(n,1)$ et $U_0(n,1)$ respectivement, J. M. P. , 12, 2087 (1968)
- [C.G.S] T. Cook, C.J. Goebel, B. Sakita, Lie group of the strong coupling theory, Phys. Rev. Let. 15, 35 (July 1965)
- [Co] S. Coleman, "Symmetry principles and Fundamental Particles" W.H. Freeman and Company Ed. (1966)
- [D] H.D. Doebner, Séminaire fait à l'école d'Istanbul en Août 1966 (non publié).
- [F] L.L. Foldy, Relativistic particle systems with interaction, Phys. Rev. 122, 275-288 (1961)
- [F1] G.N. Fleming, J. M. P. 7, 11, 1959-1981 (1966)
Phys. Rev. 137, B188 (1964)
- [F.N] O. Fleischman, J.G. Nagel, J. M. P. 8, 1128 (1967)
- [Fr] C. Fronsdal, Proceedings of the seminar on high energy physics and elementary particles, Trieste 1965.
- [F.S] M. Flato et D. Sternheimer, Phys. Rev. Let. 15, 934 (1964)
J. M. P. 7, 1932 (1966)
- [G] A. Galindo, Nu. Cim. 37, 2, 413 (1965)
- [G1] Mc. Glinn, Phys. Rev. Let. 12, 467-469 (1964)

- [Gr] O.W. Greenberg, Phys. Rev. 135, B 1447-1450 (1964)
- [J] R. Jost, Helv. Phys. Acta 39, 369 (1966)
- [L] V.D. Lyakhovsky, Com. Math. Phys. 11, 131-137 (1968)
- [L.P.W] H.J. Lipkin, M. Peshkin, W.I. Weisberger,
Magnetic charge quantization and angular momentum
Reprint, The Weizmann Inst. of Science, Rehovot, Israel (Jan.69)
- [Mi.1] L. Michel, Phys. Rev. 137, B.405-408 (1965)
- [Mi.2] L. Michel, B. Sakita, Ann. Inst. Henri Poincaré, II,2,
167-170 (1965)
- [Mi.3] L. Michel, "Coral Gables Conferences on symmetry principles
at high energy", Janvier 1965, p. 331.
- [N.W] T.D. Newton and E.P. Wigner, Rev. of Modern Physics 21, 3,
400-406 (1949)
- [O'R] L. O'Raifeartaigh, Phys. Rev. 139, B 1052-1062 (1965)
- [W] A. S. Wightman, Rev. Mod. Phys. 34, 845 (1962)
- [W.T] C.E. Wulfman, Y. Takahata, non-invariance groups in molecular
quantum mechanics, Jour. Chem. Phys. 47, 2, 488-498 (July 1967)

XIX - FINITE-DIMENSIONAL REPRESENTATIONS OF
SOME NON-SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS

Jour. of Math. Phys. Vol. 7, 6 (1966)

Finite-Dimensional Representations of Some Non-Semisimple Lie Algebras

CLAUDE GEORGE

Institut Elie Cartan, Nancy, France

AND

MONIQUE LÉVY-NAHAS

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, Paris, France

(Received 6 December 1965)

We study the finite-dimensional representations of non-semisimple Lie algebras. We give some general properties, and apply them to the case of the motion group and of the inhomogeneous Lorentz group.

INTRODUCTION

THE finite-dimensional representations of non-semisimple Lie groups (or Lie algebras) have until now not been extensively used in physics, because they are not, in general, unitary. However, the study of the representations of the inhomogeneous Lorentz group by Bargmann and Wigner in 1948, furnishes an example of construction of infinite-dimensional unitary representations starting from finite-dimensional nonunitary representations of the homogeneous Lorentz group. Likewise, the finite-dimensional representations of the "homogeneous" Galilei group (which is isomorphic to the motion group $T \times R$) are of interest in physics.¹ The aim of this paper is to study the finite-dimensional representations of any Lie algebra by using the well-known fact that any Lie algebra is an extension of a semisimple Lie algebra.

In Sec. I, we give some general features of the representations. Then we compute in Sec. II, the finite-dimensional representations of the motion group and in Secs. III, IV, those of the inhomogeneous Lorentz group (in fact of their Lie algebras). In Appendix II we give the connection between this last calculation and the derivation of invariant wave equations.

In the following, K is a field of characteristic 0 (in fact $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$). Lie algebras are of finite dimension and by representation we always mean finite-dimensional representation.

I. SOME DEFINITIONS AND STANDARD THEOREMS^{2,3}

A. Extension of a Semisimple Lie Algebra by a Lie Algebra

Let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a}$ be any Lie algebras. $\tilde{\mathfrak{g}}$ is called the extension of $\mathfrak{g}$ by $\mathfrak{a}$ if $\mathfrak{a}$ is isomorphic to an ideal

¹ J. M. Lévy-Leblond (to be published).

² All these results can be found in J. Dixmier, *Algèbres de Lie* (C. D. U. 1962).

³ See also: N. Jacobson, *Lie Algebras* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962) and J. P. Serre, "Lie Algebras and Lie Groups," lectures given at Harvard University, 1964.

$\mathfrak{a}'$ of $\tilde{\mathfrak{g}}$ and if the quotient $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a}'$ is isomorphic to $\mathfrak{g}$. The extension is called inessential if $\mathfrak{g}$ is isomorphic to a semidirect product of $\mathfrak{a}$ by $\mathfrak{g}$.⁴

Theorem: An extension of a semisimple algebra is always inessential.

In the following, $\mathfrak{g}$ will be a semisimple Lie algebra, so we are concerned only with inessential extensions. Let us consider

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\Delta} \mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

We identify $\mathfrak{a}$ to an ideal of $\tilde{\mathfrak{g}}$ by i , and $\mathfrak{g}$ to a subalgebra of $\tilde{\mathfrak{g}}$ by k . $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{g}$ are supplementary in $\tilde{\mathfrak{g}}$, which we note $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$. Recalling that, for a Lie algebra $\mathfrak{g}$, and $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad } X$ is the linear mapping of $\mathfrak{g}$ into $\mathfrak{g}$, defined by: $Y \in \mathfrak{g} \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$; $\text{ad } X$ is a derivation of $\mathfrak{g}$, that is:

$$\text{ad } X([Y, Z]) = [\text{ad } X(Y), Z] + [Y, \text{ad } X(Z)].$$

Let J be an ideal in $\mathfrak{g}$; $\text{ad}_J X$ is the restriction of $\text{ad } X$ on J .

There is an homomorphism θ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ into the Lie algebra of derivations on $\mathfrak{a}$. θ is defined by

$$\theta(X) = \text{ad}_{\mathfrak{a}} X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

In $\tilde{\mathfrak{g}}$ we have, when $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$, and $Y \in \mathfrak{g}$:

$$[A + X, B + Y] = [A, B] + \theta(X)B - \theta(Y)A + [X, Y].$$

By the mapping θ , $\mathfrak{a}$ becomes a $\mathfrak{g}$ -module. Let us recall that a $\mathfrak{g}$ -module is a couple $(V; \rho)$, where V is a vector space and ρ a representation: $X \rightarrow \rho(X)$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ into the Lie algebra $\mathcal{L}(V)$. Then we write

$$X_V \cdot v = \rho(X) \cdot v, \quad \text{where } v \in V, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

⁴ That is, if $\mathfrak{g}$ is isomorphic to a subalgebra of $\tilde{\mathfrak{g}}$.

(When no confusion would arise, we write $X \cdot v$ instead of $X_V \cdot v$.) So, in $\mathfrak{a}$ we have

$$X \cdot A = \theta(X)A = [X, A],$$

where the last term designates the bracket of A and X , considered as elements of $\tilde{\mathfrak{g}}$.

B. Some Complements about $\mathfrak{g}$ -Modules

Let V_1 , V_2 , and V be any $\mathfrak{g}$ -modules. We define a $\mathfrak{g}$ -module structure on the following spaces by

$$V_1 \otimes V_2 : X \cdot (v_1 \otimes v_2) = X \cdot v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes X \cdot v_2$$

if $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, and $X \in \mathfrak{g}$;

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) : (X \cdot f)(v_1) = X \cdot f(v_1) - f(X \cdot v_1)$$

if $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ and $v_1 \in V_1$. In particular, we can take for V_2 the trivial $\mathfrak{g}$ -module (i.e., $V_2 = K$ and $X \cdot v_2 = 0 \ \forall v_2 \in V_2, X \in \mathfrak{g}$), thus recovering the definition of the contragredient (or dual) representation $X^* = -{}^tX$.

Remark: It is easy to see that these two definitions agree with the canonical identification of $V_1^* \otimes V_2$ with $\mathcal{L}(V_1, V_2)$, which associates to each element $v_1^* \otimes v_2$ the operator

$$v_1 \rightarrow \langle v_1, v_1^* \rangle v_2.$$

$B(V_1 \times V_2; V)$ (i.e., the space of the bilinear mappings of $V_1 \times V_2$ into V).

$$(X \cdot \Phi)(v_1, v_2) = X \cdot \Phi(v_1, v_2) - \Phi(X \cdot v_1, v_2) - \Phi(v_1, X \cdot v_2), \quad \Phi \in B(V_1 \times V_2; V).$$

In particular, if V is the trivial $\mathfrak{g}$ -module, Φ is a bilinear form and

$$(X \cdot \Phi)(v_1, v_2) = -\Phi(X \cdot v_1, v_2) - \Phi(v_1, X \cdot v_2).$$

Invariant elements. Let V be a $\mathfrak{g}$ -module. An element $v \in V$ is called $\mathfrak{g}$ -invariant if $X \cdot v = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. [from the group viewpoint, by taking $g = \exp({}^tX)$, we have $gv = v$]. $V^{\mathfrak{h}}$ will be the set formed by the invariant elements of V . If $\mathfrak{g}$ is semisimple, $V = \bigoplus_i V_i$, where the V_i are simple modules (i.e., are irreducible components of the representation of $\mathfrak{g}$ in V), and $V^{\mathfrak{h}}$ is nothing other than the trivial part of the representation, that is the sum of the V_i which are isomorphic to the trivial $\mathfrak{g}$ -module (i.e., the trivial representation). From the preceding definitions we have

$$\mathcal{L}(V_1, V_2)^{\mathfrak{h}} = \{f; f \in \mathcal{L}(V_1, V_2), X \cdot f(v_1) = f(X \cdot v_1), \forall v_1 \in V_1; \text{ and } \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

It is the set of $\mathfrak{g}$ homomorphisms of V_1 into V_2 . We have also

$$B(V_1, V_2; V)^{\mathfrak{h}} = \{\Phi; \Phi \in B(V_1, V_2; V);$$

$$X \cdot \Phi(v_1, v_2) = \Phi(X \cdot v_1, v_2) + \Phi(v_1, X \cdot v_2)\}.$$

In particular, if V is the trivial $\mathfrak{g}$ -module, Φ satisfies $\Phi(X \cdot v_1, v_2) + \Phi(v_1, X \cdot v_2) = 0$. [From the group viewpoint, this relation is equivalent to $\Phi(g \cdot v_1, g \cdot v_2) = \Phi(v_1, v_2)$.]

C. Structure of the Finite-Dimensional Representations of Semisimple Lie Algebras Extensions

Let ρ be a $\tilde{\mathfrak{g}}$ representation in a finite-dimensional vector space V , and let f be the restriction of ρ to $\mathfrak{a}$. From the identifications made in I.A, we may write

$$\rho(A + X) = f(A) + \rho(X); \quad A \in \mathfrak{a}, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

V is considered as a $\mathfrak{g}$ -module (by restriction of ρ), and we write $X \cdot v$ instead of $\rho(X) \cdot v$ ($X \in \mathfrak{g}, v \in V$). $\mathfrak{a}$ is also a $\mathfrak{g}$ -module for the representation θ defined in Sec. I.A and, in the same way, we write $X \cdot A$, instead of $\theta(X) \cdot A$ ($X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{a}$). From the fact that ρ is a representation, we found the following two conditions for f :

$$f[A, B] = [f(A), f(B)], \quad \forall A, B \in \mathfrak{a}, \quad (1a)$$

$$f(X \cdot A) = X \cdot f(A), \quad f(A) \in \mathcal{L}(V) \quad (2a)$$

(by defining on $\mathcal{L}(V)$, the $\mathfrak{g}$ -module structure given in Sec. I.B. Therefore condition (2a) is equivalent to

$$f \in \mathcal{L}[\mathfrak{a}, \mathcal{L}(V)]^{\mathfrak{h}}. \quad (2b)$$

We put the preceding condition in more explicit form. As a $\mathfrak{g}$ -module, V may be written

$$V = \bigoplus_i (D_i \otimes N_i), \quad (3)$$

where the N_i are $\mathfrak{g}$ -modules such that $N_i^{\mathfrak{h}} = N_i$ and the D_i are simple modules such that $D_i \chi D_j$ if $i \neq j$.

We have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathfrak{a}, \mathcal{L}(V)] &\simeq \mathfrak{a}^* \otimes V^* \otimes V \\ &\simeq \bigoplus_{i,j} (\mathfrak{a}^* \otimes D_i^* \otimes D_i \otimes N_j^* \otimes N_j) \end{aligned}$$

and

$$\mathcal{L}[\mathfrak{a}, \mathcal{L}(V)]^{\mathfrak{h}} \cong \bigoplus_{i,j} \{(\mathfrak{a}^* \otimes D_i^* \otimes D_i)^{\mathfrak{h}} \otimes N_j^* \otimes N_j\}.$$

So, corresponding to the decomposition (3), $f(A)$ can be put in the matrix form $(f_{ij}(A))$, where

$$f_{ij}(A) = T_{ij}(A) \otimes M_{ij} \quad (4)$$

and

$$T_{ij} \in (\alpha^* \otimes D_i^* \otimes D_i)^h, \quad (2.c)$$

$$M_{ij} \in N_i^* \otimes N_i \simeq \mathcal{L}(N_i, N_i). \quad (5)$$

Computing f_{ij} is equivalent to extracting the trivial representation from the product of three representations. Now we also assume that α is a simple $\mathfrak{g}$ -module (for the representation θ).

The dimension of $(\alpha^* \otimes D_i^* \otimes D_i)^h$ is equal to the number of times that α appears in $D_i^* \otimes D_i$. If, in the product of two irreducible representations of $\mathfrak{g}$, each irreducible representation appears at most once (we say that $\mathfrak{g}$ is "simply reducible"), the dimension of $(\alpha^* \otimes D_i^* \otimes D_i)^h$ is equal to one or zero, according as α does or does not appear in the decomposition of $D_i^* \otimes D_i$.

We restrict ourselves to that case. So we found that the T_{ij} are known except for a multiplicative constant.

The condition (1a) must still be satisfied. For this purpose, the following remark is useful. Let V_1, V_2, V_3 be $\mathfrak{g}$ -modules, and α the $\mathfrak{g}$ -module defined in Sec. I.A. Let us consider

$$f_1 \in \mathcal{L}(\alpha; \mathcal{L}(V_1, V_2))^h,$$

$$f_2 \in \mathcal{L}(\alpha; \mathcal{L}(V_2, V_3))^h,$$

$$f_3 \in \mathcal{L}(\alpha; \mathcal{L}(V_1, V_3))^h.$$

We defined

$$\Phi(A, B) = f_2(A)f_1(B) - f_2(B)f_1(A) - f_3([A, B]).$$

Then

$$\Phi \in B(\alpha \wedge \alpha; \mathcal{L}(V_1, V_3))^h.$$

If $B(\alpha \wedge \alpha; \mathcal{L}(D_i, D_i))^h$ is not a zero-dimensional space, let (Φ_{λ}^{ij}) be a basis of this space and

$$\begin{aligned} \Phi_{ikj}(A, B) &= T_{ik}(A)T_{kj}(B) - T_{ik}(B) \cdot T_{kj}(A) \\ &= \sum_{\lambda} \gamma_{ijk}^{\lambda} \Phi_{\lambda}^{ij}(A, B), \end{aligned}$$

$$T_{ij}([A, B]) = \sum_{\lambda} \delta_{ij}^{\lambda} \Phi_{\lambda}^{ij}(A, B).$$

The condition (1a) may be written

$$\sum_k f_{ik}(A)f_{kj}(B) - f_{ik}(B) \cdot f_{kj}(A) = f_{ij}([A, B]),$$

and, from (4)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, k} \gamma_{ijk}^{\lambda} \Phi_{\lambda}^{ij}(A, B) \otimes M_{ik} M_{kj} \\ = \sum_{\lambda} \delta_{ij}^{\lambda} \Phi_{\lambda}^{ij}(A, B) \otimes M_{ij}. \end{aligned}$$

So we have the following conditions:

$$\delta^{\lambda} M_{ij} = \sum_k \gamma_{ikj}^{\lambda} M_{ik} M_{kj}. \quad (1.b)$$

for each pair (i, j) for which $\mathcal{L}(\alpha \wedge \alpha; \mathcal{L}(D_i, D_i))^h$ is not a zero-dimensional space.

D. Application to the Finite-Dimensional Representations of any Lie Algebra

The following well-known result is used: An arbitrary Lie algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ is the semidirect product of its radical R and a semisimple algebra $\mathfrak{g}$. (R is the greatest solvable ideal of $\mathfrak{g}$.) The preceding results can be applied. There are now some other properties, due to the fact that R is solvable.

Let (ρ, V) be an irreducible representation of $\tilde{\mathfrak{g}}$.

(a) ρ is zero on $N = [R, \tilde{\mathfrak{g}}]$. In fact $N = [R, \tilde{\mathfrak{g}}]$ is the nilpotent radical of $\tilde{\mathfrak{g}}$; but it is well known that N is also the set of $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ such that $\rho(X) = 0$ for each irreducible representation.

(b) For each $A \in R$, $\rho(A) = \lambda \cdot 1_V$. It results from Schur's lemma (if the field is algebraically closed: i.e. $K = \mathbb{C}$). In particular, if $R = N$, $\rho(R)$ is zero for each irreducible representation. It is the case when $R^h = 0$, because in that case $[R, \mathfrak{g}] = R$ and *a fortiori* $[R, \tilde{\mathfrak{g}}] = R$.

Consequence: Each irreducible representation of $\tilde{\mathfrak{g}}$ restricted to $\mathfrak{g}$ is still an irreducible representation of $\mathfrak{g}$.

E. Application to the Semidirect Product of an Abelian Lie Algebra by a Semisimple One

We suppose that $\tilde{\mathfrak{g}} = \alpha \ltimes \mathfrak{g}$, where A is Abelian and is a simple $\mathfrak{g}$ -module. We have $R = \alpha$ and $N = [\alpha, \tilde{\mathfrak{g}}] = [\alpha, \mathfrak{g}] = \alpha$. Let us set

$$\begin{cases} V_p = \{v \in V; f(A)v \in V_{p-1}, \forall A \in \alpha\}, \\ V_{-1} = \{0\}. \end{cases}$$

Then

$$\{0\} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V,$$

and, from the preceding sections

$$V_p \neq V_{p-1}, \text{ if } p = 0, \dots, n.$$

It is obvious that the V_p are sub- $\mathfrak{g}$ -module of V so we have

$$V_p = \sum_i (D_i \otimes N_{i,p}),$$

where $N_{i,p} \subset N_i$, and it is easy to see that

$$\begin{cases} N_{i,p} = \{n; n \in N_i, M_{ij}n \\ \quad \in N_{i,p-1} \forall i \text{ such that } T_{ij} \neq 0\}, \\ N_{i,-1} = \{0\}. \end{cases}$$

It is then possible to find subspaces $\tilde{N}_{i,p}$, $p=0, 1 \dots n$ of N_i such that

$$N_{i,p} = \tilde{N}_{i,0} \oplus \tilde{N}_{i,1} \oplus \dots \oplus \tilde{N}_{i,p}.$$

(But it is to be noticed that this choice is by no mean canonical.) We can put the matrices M_{ij} in the form

$$M_{ij} = (M_{ij,pa})_{p,a},$$

where $M_{ij,pa}$ are $n_{i,p} \times n_{j,a}$ matrices and $n_{i,p} = \dim N_{i,p}$. It is clear that

$$M_{ij,pa} = 0 \quad \text{if } p \geq q.$$

We can now resume the situation in the following way. To get an explicit form for a finite-dimensional representation of $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$, we have to take a family $(n_{i,p})_{0 \leq p \leq n}$ $i \in I$ of integers, where I is the set of classes of equivalent finite-dimensional representation of $\mathfrak{g}$, and a family $(M_{ij,pa})_{0 \leq p, q \leq n}$ $i, j \in I$ of $n_{i,p} \times n_{j,q}$ matrices, where

$$M_{ij,pa} = 0 \quad \text{if } \dim(\mathfrak{a}^* \otimes D_i^* \otimes D_j)^{\mathfrak{h}} = 0$$

or if $p \geq q$

and satisfying the following conditions⁵:

$$\sum_k \gamma_{ikj}^\lambda M_{ik} M_{kj} = 0, \quad (6)$$

with

$$M_{ij} = (M_{ij,pa})_{p,a}.$$

Defining $\tilde{V}_p = \bigoplus_i (D_i \otimes \tilde{N}_{i,p})$; to the decomposition $V = \bigoplus_p \tilde{V}_p$ corresponds a matrix form by "blocks" for ρ :

$$\rho(X + A) = \begin{bmatrix} \rho_1(X) & \tilde{f}_{12}(A) & \dots & \tilde{f}_{1n}(A) \\ 0 & \rho_2(X) & \dots & \tilde{f}_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n(X) \end{bmatrix},$$

where

$$\rho_p(X) = \bigoplus_i (D_i(X) \otimes \mathbf{1}_{n_{i,p}}),$$

$$\tilde{f}_{p,q}(A) = (f_{ij,pa}(A))_{i,j} \in I,$$

$\tilde{f}_{ij,pa}(A)$ being a matrix which maps $D_i \otimes \tilde{N}_{i,a}$ into $D_j \otimes \tilde{N}_{j,p}$ and which is defined by

$$\tilde{f}_{ij,pa}(A) = T_{ij}(A) \otimes M_{ij,pa}.$$

Remark 1: We see from the preceding results (4)–(5) that, if the representation ρ restricted to $\mathfrak{a}$

⁵ Remark: the matrices $M_{ij,pa}$ are also submitted to the condition $\bigcap_i \ker M_{ij, p-1, p} = \{0\}$.

is nontrivial, then ρ is reducible, but not completely reducible.⁴

Remark 2. Equivalence of representations.

Let us consider two representations $\rho = \sum_i D_i \otimes N_i$ and $\rho' = \sum_i D_i \otimes N_i$ (where we identify space and representation). The intertwining operators have the following form:

$$A = \sum_i \mathbf{1}_{D_i} \otimes A_i, \quad A_i \in \mathcal{L}(N_i),$$

where the A_i are such that

$$A_i M_{ij} = M'_{ij} A_j.$$

Then, the necessary and sufficient condition for the equivalence of two representations is the existence of invertible matrices A_i such that

$$M'_{ij} = A_i M_{ij} A_j^{-1}.$$

II. APPLICATION TO THE FINITE-DIMENSIONAL REPRESENTATION OF THE MOTION GROUP OF THREE-DIMENSIONAL SPACE

This group is the semidirect product $T \times R$ of the translation group and the rotation group in a three-dimensional Euclidian space. We want to find the continuous finite-dimensional representations, so it is sufficient to determine the representations of the corresponding Lie algebra. This one is also a semidirect product $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$, where $\mathfrak{g} \simeq SU(2)$ and $\mathfrak{a}$ is an Abelian three-dimensional Lie algebra, which as a $\mathfrak{g}$ -module, is equivalent to D_l . (As usual, the irreducible representations of $\mathfrak{g}$ are designed by D_l , where $2l$ is an integer.)

A. T_{ij} 's Derivation

Let X_+ , X_- , and H be the canonical elements of $\mathfrak{g}$ such that

$$[X_+, X_-] = 2H,$$

$$[H, X_+] = X_+,$$

$$[H, X_-] = -X_-.$$

The T_{ij} are more easily computed in the basis (e_h^l) of D_l defined by

$$\begin{cases} X_+ e_h^l = (l - h) e_{h+1}^l, \\ X_- e_h^l = (l + h) e_{h-1}^l, \\ H e_h^l = h e_h^l. \end{cases}$$

From

$$(\mathfrak{a}^* \otimes D_i^* \otimes D_i)^{\mathfrak{h}} = (D_1 \otimes D_i \otimes D_i)^{\mathfrak{h}}$$

it is clear that this space is not zero-dimensional only if i and j are not simultaneously equal to 0.

So we have only to compute

$$T_{i,i} \quad (i \neq 0), \quad T_{i+1,i} \quad \text{and} \quad T_{i-1,i}$$

(remark: i is either always an integer or always a half-integer).

We search $T_{i,i}$ under the form

$$\sum_{\lambda, \mu} C_{\lambda \mu}^{i,i} e_{-\lambda}^1 \otimes e_{\mu}^i \otimes e_{-\mu+\lambda}^i,$$

where the $C_{\lambda \mu}^{i,i}$ are Clebsch-Gordan coefficients. Then the corresponding operators are given by

$$[T_{i,i}(e_{\lambda}^1)] \cdot e_{\mu}^i = (e_{-\mu}^i, e_{\mu}^i)(e_{-\lambda}^1, e_{\lambda}^1) C_{-\lambda, -\mu}^{i,i} e_{\mu+\lambda}^i,$$

where $(\cdot, \cdot)$ is the scalar product defined by

$$(e_{\mu}^i, e_{\mu'}^i) = \delta_{\mu, -\mu'} (-)^{\mu} (i - \mu)! (i + \mu)!$$

After computation and a suitable choice of the arbitrary constant in each case, we find

$$[T_{i,i}(e_{\lambda}^1)] e_{\mu}^i = (\mu - i\lambda) e_{\mu+\lambda}^i,$$

$$[T_{i+1,i}(e_{\lambda}^1)] e_{\mu}^i = e_{\mu+\lambda+1}^i,$$

$$\begin{cases} [T_{i-1,i}(e_{\lambda}^1)] e_{\mu}^i = -(i - \mu)(i - \mu - 1) e_{\mu+1}^{i-1}, \\ [T_{i-1,i}(e_0^1)] e_{\mu}^i = +(i + \mu)(i - \mu) e_{\mu}^{i-1}, \\ [T_{i-1,i}(e_{-1}^1)] e_{\mu}^i = -(i + \mu)(i + \mu - 1) e_{\mu-1}^{i-1}. \end{cases}$$

This result can be expressed in the ordinary (and orthogonal) basis ξ_m^i by the following transformation.⁶

$$e_m^i = \gamma_m^i \xi_m^i$$

with

$$\gamma_i^i = 1 \quad \text{and} \quad \gamma_m^i = [(l + m)!(l - m)!/(2l)!]^{\frac{1}{2}}.$$

We have (also with a choice of the arbitrary constant in each case):

$$\begin{cases} [T_{i,i}(e_1^1)] \xi_m^i = [(i - m)(i + m + 1)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m+1}^i, \\ [T_{i,i}(e_0^1)] \xi_m^i = m \xi_m^i, \\ [T_{i,i}(e_{-1}^1)] \xi_m^i = [(i + m)(i + 1 - m)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m-1}^i, \\ [T_{i+1,i}(e_1^1)] \xi_m^i = [(i + m + 2)(i + m + 1)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m+1}^{i+1}, \\ [T_{i+1,i}(e_0^1)] \xi_m^i = [(i + 1)^2 - m^2]^{\frac{1}{2}} \xi_m^{i+1}, \\ [T_{i+1,i}(e_{-1}^1)] \xi_m^i = [(i + 2 - m)(i + 1 - m)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m-1}^{i+1}, \\ [T_{i-1,i}(e_1^1)] \xi_m^i = -[(i - m)(i - 1 - m)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m+1}^{i-1}, \\ [T_{i-1,i}(e_0^1)] \xi_m^i = (i^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} \xi_m^{i-1}, \\ [T_{i-1,i}(e_{-1}^1)] \xi_m^i = -[(i + m)(i - 1 + m)]^{\frac{1}{2}} \xi_{m-1}^{i-1}. \end{cases}$$

⁶ This result was already given under a more general form (concerning every convex Lie group) by D. Zelobenko, Tr. Mosk. Mat. Obshchestva 12, 62 (1963).

B. The Coefficients γ_{ikj}

We have (cf. Sec. I.C):

$$(\alpha \wedge \alpha) \otimes D_i^* \otimes D_i = D_1 \otimes D_i \otimes D_i$$

because it is well known that $D_1 \wedge D_1 = D_1$. This space is then at most one-dimensional, and we have only to compute

$$\begin{aligned} \gamma_{i,i+1,i}, \quad \gamma_{i,i-1,i}, \quad \gamma_{i,i,i}, \quad \gamma_{i+1,i,i}, \\ \gamma_{i+1,i+1,i}, \quad \gamma_{i-1,i,i}, \quad \gamma_{i-1,i-1,i}. \end{aligned}$$

By a suitable choice of arbitrary constants we find

$$\begin{cases} \gamma_{i,i-1,i} = 2i - 1, \\ \gamma_{i,i,i} = 1, \\ \gamma_{i,i+1,i} = -(2i + 3), \\ \gamma_{i+1,i,i} = i, \\ \gamma_{i+1,i+1,i} = -(i + 2), \\ \gamma_{i-1,i,i} = i + 1, \\ \gamma_{i-1,i-1,i} = -(i - 1). \end{cases}$$

C. Diagram Associated with a Representation

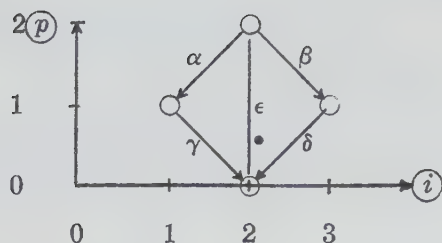
1. Description

Let us recall first (see Sec. I.E) that the representations space V has a decomposition $V = \bigoplus \tilde{V}_p$, where $\tilde{V}_p = \bigoplus_i (D_i \otimes \tilde{N}_{i,p})$; for which the representation matrix has a triangular form. Then to each representation we associate the diagram formed by the points of coordinates (i, p) . (i is an integer or an half-integer, but we can always restrict ourselves to the case where all i are of the same kind.) Now each point (i, p) is labeled by a number $\tilde{n}_{i,p} = \dim \tilde{N}_{i,p} =$ multiplicity of D_i in $\tilde{V}_p$. [We consider only the points (i, p) for which $\tilde{n}_{i,p}$ is different from zero.] Such a diagram does not determine completely the representation. It is also necessary to know the matrix $M_{ij,pq}$, which performs the transition from the point (j, q) to the point (i, p) ; i.e., there is a transition between points such that $q > p$ and $|i - 1| \leq j \leq i + 1$ ($j, i \neq 0$ simultaneously). We represent one matrix on the diagram by an arrow joining the points.

We do not consider nonconnected diagrams which certainly correspond to representations which are reducible in a direct sum of representations.

2. Example

One case is particularly simple: When all the $\tilde{n}_{i,p}$ are equal to one or zero. Then the matrix $M_{ij,pq}$ reduces to a scalar $\alpha_{ij,pq}$. Let us consider, for example, the following diagram:



where we have dropped the coefficient $\tilde{n}_{i,p}$ always equal to one. It means

$$\tilde{V}_0 = D_2, \quad \tilde{V}_1 = D_1 \oplus D_3, \quad \text{and} \quad \tilde{V}_2 = D_2.$$

To this diagram corresponds the representation

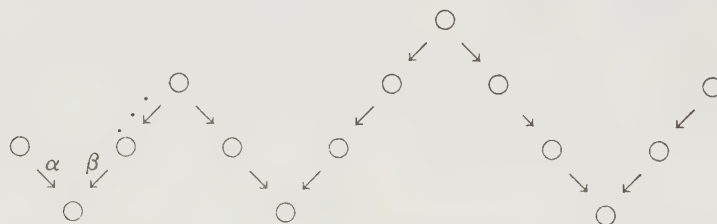
$$\rho(X+A) = \begin{array}{c|c|c|c} D_2(X) & \gamma T_{21}(A) & \delta T_{23}(X) & \epsilon T_{22}(A) \\ \hline 0 & D_1(X) & 0 & \alpha T_{21}(A) \\ \hline 0 & 0 & D_3(X) & \beta \cdot T_{32}(A) \\ \hline 0 & 0 & 0 & D_2(X) \end{array}$$

The coefficients $\alpha, \beta, \dots$ are not independent. They must satisfy the conditions (6). In this case (6) reduces to

$$\alpha\gamma/\beta\delta = \frac{7}{3}.$$

3. Particular Representations

Let us consider the particular representations which do not contain two identical D_i . Then it is easy to see that the associated diagrams must be of the following form:



and in this case, the form of the diagram completely determines the representation. More precisely, to each diagram of this sort corresponds a class of equivalent representations.

In fact, by changing the basis in each D_i , it is always possible to reduce any coefficient β to 1.

So the representations corresponding to different coefficients are equivalent.

D. Tensor Product of Representations

In Sec. I.B, we have already given the $\mathfrak{g}$ -module structure for the tensor product of $\mathfrak{g}$ -modules V and V' . It corresponds to

$$[(\rho \otimes \rho')(\tilde{X})](e \otimes e') = \rho(\tilde{X})e \otimes e' + e \otimes \rho'(\tilde{X})e',$$

where

$$e \in V, \quad e' \in V', \quad \tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \text{i.e.,} \quad \tilde{X} = X + A$$

with $X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{a}$.

We first have to study the structure of the representation space $V \otimes V'$, or equivalently, the structure of the diagram associated with the tensor product of the two representations.

With the notations defined in Sec. II.C, it is possible to show that

$$(V \otimes V')_r = \sum_{p+q=r} \tilde{V}_p \otimes \tilde{V}'_q,$$

which means that it is possible to take

$$(V \otimes V')_r = \sum_{p+q=r} \tilde{V}_p \otimes \tilde{V}'_q;$$

so we obtain the r th stage of the diagram associated with the representation $\rho \otimes \rho'$, in terms of the p th and q th stages of the diagrams associated respectively with ρ or ρ' .

Then we have to find the explicit form of the matrices. After some Clebsch-Gordan calculations, we find

$$[T_{i',i} \otimes 1](A) = \sum_{\lambda, \lambda'} \gamma_{i',i}^{\lambda',\lambda} T_{\lambda',\lambda}(A), \quad A \in \mathfrak{a},$$

where $T_{i',i} \otimes 1$ is a map: $D_i \otimes D_i \rightarrow D_{i'} \otimes D_i$, the coefficient $\gamma_{i',i}^{\lambda',\lambda}$ being proportional to the (6- j) coefficient

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \lambda' & \lambda \\ j & i & i' \end{array} \right\}.$$

III. FINITE-DIMENSIONAL REPRESENTATION OF $\tilde{\mathfrak{G}} = M \times SU(2)$ WITH $M \simeq D^{1/2}$

We give here the results concerning this Lie algebra, because, as we see in the next section, it is then very easy to obtain the structure of the finite representations of the inhomogeneous Lorentz group.

Now we have simpler results in this case than in the preceding one. This comes from the following fact:

$$T_{ij} \in (D^{\frac{1}{2}} \otimes D^i \otimes D^j)^{\frac{1}{2}},$$

i.e., there is only a transition matrix T_{ij} for

$$|i - j| = \frac{1}{2}.$$

We get

$$\begin{aligned} [T_{i+\frac{1}{2}, i}(e_i^{\frac{1}{2}})] e_{\lambda}^i &= e_{\lambda+\epsilon}^{i+\frac{1}{2}}, \\ [T_{i-\frac{1}{2}, i}(e_i^{\frac{1}{2}})] e_{\lambda}^i &= (2\epsilon i - \lambda) e_{\lambda+\epsilon}^{i-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We come now to the condition (1a). We have to consider the space

$$[(D^{\frac{1}{2}} \wedge D^{\frac{1}{2}}) \otimes D^i \otimes D^j]^{\frac{1}{2}} = (D^0 \otimes D^i \otimes D^j)^{\frac{1}{2}}.$$

This space is zero or one dimensional according as $i \neq j$ or $i = j$. An easy calculation shows that

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \Phi_{i, i+\frac{1}{2}, i} &= (i+1)\Phi_i \\ \Phi_{i, i-\frac{1}{2}, i} &= -i\Phi_i \end{aligned} \right\} \text{ or } \Phi_{i, i+\epsilon, i} &= 2\epsilon(i + \frac{1}{2} + \epsilon)\Phi_i, \\ \Phi_{i, i, k} &= 0, \quad \text{in the other cases,} \end{aligned}$$

where the $\Phi_{i, k, j}$ have been defined (Sec. I.C), and Φ_i is a nonzero element of $(D^0 \otimes D^i \otimes D^i)^{\frac{1}{2}}$. In other terms we have

$$\begin{aligned} \gamma_{i, i+\frac{1}{2}, i} &= i+1, \\ \gamma_{i, i-\frac{1}{2}, i} &= -i, \end{aligned}$$

the other $\gamma_{i, k, j}$ being zero.

Finally, the preceding remarks concerning the diagram associated with a representation, and the tensor product of two representations are always valid in this case.

IV. FINITE-DIMENSIONAL REPRESENTATIONS OF THE INHOMOGENEOUS LORENTZ GROUP

In the same way as the preceding section, we consider only the Lie algebra.

A. Notations and Basic Facts

1. The homogeneous Lorentz group

A basis of the real Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ of the homogeneous Lorentz group is constituted by the elements

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, & C_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considering the corresponding complex Lie algebra $\mathfrak{g}$, we can take the basis

$$\begin{aligned} (b) \quad X_1 &= A_1 + iA_2, & X_2 &= A_1 - iA_2, \\ Y_1 &= B_1 + iB_2, & Y_2 &= B_1 - iB_2, \\ H_1 &= \frac{1}{2}(C_1 + iC_2), & H_2 &= \frac{1}{2}(C_1 - iC_2). \end{aligned}$$

It should be kept in mind that the i which appear in (a) and in (b) have different meaning, thus obtaining the following multiplication table:

$$\begin{aligned} [H_1, X_1] &= X_1, & [H_2, X_2] &= X_2, \\ [H_1, Y_1] &= -Y_1, & [H_2, Y_2] &= -Y_2, \\ [X_1, Y_1] &= 2H_1, & [X_2, Y_2] &= 2H_2, \end{aligned}$$

and the other commutators are zero.

The finite-dimensional representations of $\mathfrak{g}$ are labeled by numbers n and m , which can be either integer or half-integer $D_{n,m}$. First we choose the noncanonical basis which is formed in an obvious way from the tensor product of basis e_{λ}^i defined in Sec. II. Denoting the elements of this basis by $e_{h,k}^{n,m}$, we have

$$\begin{aligned} X_1 e_{h,k}^{n,m} &= (n-h) e_{h+1,k}^{n,m}, & X_2 e_{h,k}^{n,m} &= (m-k) e_{h,k+1}^{n,m}, \\ Y_1 e_{h,k}^{n,m} &= (n+h) e_{h-1,k}^{n,m}, & Y_2 e_{h,k}^{n,m} &= (m+k) e_{h,k-1}^{n,m}, \\ H_1 e_{h,k}^{n,m} &= h \cdot e_{h,k}^{n,m}, & H_2 e_{h,k}^{n,m} &= k e_{h,k}^{n,m}. \end{aligned}$$

2. The inhomogeneous case

The Lie algebra of the inhomogeneous Lorentz group is a semidirect product $\tilde{\mathfrak{G}} = M \times \mathfrak{g}$, where M is an Abelian four-dimensional Lie algebra, isomorphic to $D^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$. An element of M is denoted by $e_{\epsilon, \eta}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$.

B. The Finite-Dimensional Representations

1. $T_{i,i}$, Derivation

Applying the results of Sec. I, we have to compute the matrices $T_{i,i}$, where i and j are now a set of two integers or half-integers: $i = (n, m)$; $j = (n', m')$.

$$T_{i,i} \in (D^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \otimes D^{n,m} \otimes D^{n',m'})^{\frac{1}{2}}.$$

So there are only transitions $T_{n',m';nm}$ for $|n' - n| = \frac{1}{2}$ and $|m' - m| = \frac{1}{2}$. But from the following identification:

$$\begin{aligned} (D^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \otimes D^{n,m} \otimes D^{n',m'})^{\frac{1}{2}} \\ = (D^{\frac{1}{2}} \otimes D^n \otimes D^{n'})^{\frac{1}{2}} \otimes (D^{\frac{1}{2}} \otimes D^m \otimes D^{m'})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

we get

$$T_{nm, n', m'}(x \otimes y) = T_{n, n'}(x) \otimes T_{m, m'}(y),$$

where

$$x, y \in D^{\frac{1}{2}}; \quad x \otimes y \in D^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

It means that with our choice of basis, we have only to make a tensor product of the results given in Sec. III, thus obtaining

$$\begin{aligned} [T_{n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}; n, m}(\epsilon, \eta)] e_{h, k}^{n, m} &= e_{h+\epsilon, k+\eta}^{n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}, \\ [T_{n-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}; n, m}(\epsilon, \eta)] e_{h, k}^{n, m} &= (2\epsilon n - h) e_{h+\epsilon, k+\eta}^{n-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}, \\ [T_{n+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}; n, m}(\epsilon, \eta)] e_{h, k}^{n, m} &= (2\eta m - k) e_{h+\epsilon, k+\eta}^{n+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}, \\ [T_{n-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}; n, m}(\epsilon, \eta)] e_{h, k}^{n, m} &= (2\epsilon\eta - h)(2\eta m - k) e_{h+\epsilon, k+\eta}^{n-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where $T_{i, \epsilon}(\epsilon, \eta)$ means $T_{i, \epsilon}(e_{\epsilon, \eta}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})$.

Now, from the physicist's viewpoint, it may be useful to know the results in the canonical and more physical basis ξ_{lm}^i , as described in Ref. 5, p. 188. The results are given in Appendix I.

2. Relations between the matrices M_{ij}

Let us recall that

$$\Phi_{n, \nu, n'}(x, x') = T_{n, \nu}(x) \cdot T_{\nu, n'}(x') - T_{n, \nu'}(x') \cdot T_{\nu, n}(x) \\ x, x' \in D^{\frac{1}{2}}.$$

Now we define also a symmetric bilinear form

$$\Psi_{n, \nu, n'}(x, x') = \frac{1}{2} [T_{n, \nu}(x) T_{\nu, n'}(x') + T_{n, \nu'}(x') \cdot T_{\nu, n}(x)].$$

It is easy to prove exactly in the same way that

$$\Psi_{n, \nu, n'} \in [(D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}}) \otimes D^n \otimes D^{n'}]^{\frac{1}{2}},$$

with

$$D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}} = D^1.$$

We have to consider the bilinear form $\Phi_{nm; \nu\mu; n'm'}$ but it is clear that

$$\begin{aligned} \Phi_{nm; \nu\mu; n'm'}(x \otimes y, x' \otimes y') \\ = \Phi_{n, \nu, n'}(x, x') \otimes \Psi_{m, \mu, m'}(y, y') \\ + \Psi_{n, \nu, n'}(x, x') \otimes \Phi_{m, \mu, m'}(y, y'). \end{aligned}$$

The only nonzero $\Phi_{nm; \nu\mu; n'm'}$ are those corresponding to

$$\begin{aligned} |n - \nu| = |m - \mu| = |n' - \nu| = |m' - \mu| = \frac{1}{2}, \\ |n - n'| = 0, 1; \quad |m - m'| = 0, 1. \end{aligned}$$

Now, the only nonzero Ψ are

$$\begin{aligned} \Psi_{m, m+\frac{1}{2}, m} &= \Psi_{m, m-\frac{1}{2}, m} = \Psi_m^0, \\ \Psi_{m+1, m+\frac{1}{2}, m} &= \Psi_m^1, \\ \Psi_{m-1, m-\frac{1}{2}, m} &= \Psi_m^{-1}, \end{aligned}$$

where the first equality can be easily verified. We have to distinguish three cases:

$$\begin{aligned} \text{I. } \begin{cases} n' = n + 2\epsilon \\ m' = m \end{cases} \begin{cases} \nu = n + \epsilon \\ \mu = m + \eta \end{cases} \text{ with } \epsilon, \eta = \pm \frac{1}{2}, \\ \Phi_{n', m'; \nu, \mu; n, m} = 2\eta(m + \eta + \frac{1}{2}) \Psi_{\eta}^{2\epsilon} \otimes \Phi_m. \\ \text{II. } \begin{cases} n' = n \\ m' = m + 2\eta \end{cases} \begin{cases} \nu = n + \epsilon \\ \mu = m + \eta \end{cases} \text{ with } \epsilon, \eta = \pm \frac{1}{2}, \\ \Phi_{n', m'; \nu, \mu; n, m} = 2\epsilon(n + \epsilon + \frac{1}{2}) \Phi_n \otimes \Psi_m^{2\eta}. \\ \text{III. } \begin{cases} n' = n \\ m' = m \end{cases} \begin{cases} \nu = n + \epsilon \\ \mu = m + \eta \end{cases} \\ \Phi_{n, m; \nu\mu; n, m} = 2\eta(m + \eta + \frac{1}{2}) \Psi_n^0 \otimes \Phi_m \\ + 2\epsilon(n + \epsilon + \frac{1}{2}) \Phi_n \otimes \Psi_m^0. \end{aligned}$$

From there, we get the following relations between the matrices M_{ij} [the relations (6)]:

$$\begin{aligned} \text{I. } \sum_{\eta} 2\eta(m + \eta + \frac{1}{2}) \\ \times M_{n+2\epsilon, m; n+\epsilon, m+\eta} \cdot M_{n+\epsilon, m+\eta; n, m} = 0, \\ \text{II. } \sum_{\epsilon} 2\epsilon(n + \epsilon + \frac{1}{2}) \\ \times M_{n, m+2\eta; n+\epsilon, m+\eta} \cdot M_{n+\epsilon, m+\eta; n, m} = 0, \end{aligned}$$

III. gives two relations:

$$\sum_{\epsilon, \eta} 2\epsilon(n + \epsilon + \frac{1}{2}) M_{n, m; n+\epsilon, m+\eta} \cdot M_{n+\epsilon, m+\eta; n, m} = 0$$

and

$$\sum_{\epsilon, \eta} 2\eta(m + \eta + \frac{1}{2}) M_{n, m; n+\epsilon, m+\eta} \cdot M_{n+\epsilon, m+\eta; n, m} = 0.$$

ACKNOWLEDGMENTS

One of us (M.L.N.) is grateful to J. Lascoux and P. Renouard for several interesting comments and to L. Boutay de Monvel for helpful discussions about Lie algebras.

APPENDIX I. THE MATRICES T_{ij} IN THE "CANONICAL" BASIS ξ_{lm}^i

We adopt here the notations of Ref. 7, i.e.,

$$\tau = (l_0, l_1) \quad \text{with} \quad \begin{cases} l_0 = n - m, \\ l_1 = n + m + 1. \end{cases}$$

In this case, we found that there is only transition matrices $T^{\tau'\tau}$ between $\tau = (l_0, l_1)$ and $\tau' = (l_0, l_1 \pm 1)$ or $\tau' = (l_0 \pm 1, l_1)$. After some straightforward calculations, we get, using the notation $\xi_{lm}^{l_0, l_1}$:

⁷ J. M. Gel'fand-R. A. Minlos and Z. Ya Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications* (Pergamon Press Inc., New York, 1963), p. 145.

$$\begin{aligned}
[T^{\tau'\tau}(\xi_{1,1}^{(0,2)})]\xi_{l,m}^{\tau} &= \alpha_l^{\tau'\tau}[(l+m+2)(l+m+1)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l+1,m+1}^{\tau'} \\
&+ \beta_l^{\tau'\tau}[(l-m)(l+m+2)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l,m+1}^{\tau'} \\
&+ \gamma_l^{\tau'\tau}[(l-m)(l-m-1)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l-1,m+1}^{\tau'}, \\
[T^{\tau'\tau}(\xi_{1,0}^{(0,2)})]\xi_{l,m}^{\tau} &= \alpha_l^{\tau'\tau}[(l+1)^2 - m^2]^{\frac{1}{2}}\xi_{l+1,m}^{\tau'} \\
&+ \beta_l^{\tau'\tau} \cdot m \cdot \xi_{l,m}^{\tau'} - \gamma_l^{\tau'\tau}(l^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}\xi_{l-1,m}^{\tau'}, \\
[T^{\tau'\tau}(\xi_{1,-1}^{(0,2)})]\xi_{l,m}^{\tau} &= \alpha_l^{\tau'\tau}[(l+2-m)(l+1-m)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l+1,m-1}^{\tau'} \\
&+ \beta_l^{\tau'\tau}[(l+m)(l+1-m)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l,m-1}^{\tau'} \\
&+ \gamma_l^{\tau'\tau}[(l+m)(l-1+m)]^{\frac{1}{2}}\xi_{l-1,m-1}^{\tau'}, \\
[T^{\tau'\tau}(\xi_{0,0}^{(0,2)})]\xi_{l,m}^{\tau} &= c_l^{\tau'\tau}\xi_{l,m}^{\tau'},
\end{aligned}$$

where the coefficients α , β , γ are given by the following formulas:

$$\begin{aligned}
\alpha_l^{\tau'\tau} &= c_l^{\tau'\tau}C_{l+1}^{\tau'} - c_{l+1}^{\tau'\tau}C_{l+1}^{\tau}, \\
\beta_l^{\tau'\tau} &= c_l^{\tau'\tau}[A_l^{\tau'} - A_l^{\tau}], \\
\gamma_l^{\tau'\tau} &= c_{l-1}^{\tau'\tau}C_l^{\tau} - c_l^{\tau'\tau}C_l^{\tau'}.
\end{aligned}$$

where (cf. Ref. 7, p. 189)

$$C_l^{\tau} = \frac{i}{l} \left[\frac{(l^2 - l_0^2)(l^2 - l_1^2)}{4l^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

and

$$A_l^{\tau} = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}.$$

First case: $\tau' = (l_0, l_1+1)$.

$$\begin{aligned}
c_l^{\tau'\tau} &= c_l^{\tau'\tau}[(l-l_1)(l+l_1+1)]^{\frac{1}{2}}, \\
\alpha_l^{\tau'\tau} &= \frac{1}{l+1} \left\{ \frac{[(l+1)^2 - l_0^2][l+l_1+2][l+l_1+1]}{4(l+1)^2 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}} c_l^{\tau'\tau}, \\
\beta_l^{\tau'\tau} &= \frac{l_0}{l(l+1)} [(l-l_1)(l+l_1+1)]^{\frac{1}{2}} c_l^{\tau'\tau}, \\
\gamma_l^{\tau'\tau} &= -\frac{1}{l} \left\{ \frac{(l-l_1)(l-l_1-1)(l^2 - l_0^2)}{4l^2 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}} c_l^{\tau'\tau},
\end{aligned}$$

where $c_l^{\tau'\tau}$ is a constant independent of l .

Second case: $\tau' = (l_0+1, l_1)$.

$$c_l^{\tau'\tau} = c_2^{\tau'\tau}[(l-l_0)(l+l_0+1)]^{\frac{1}{2}},$$

and α , β , γ are given by the same formulas l_0 and l_1 being interchanged.

The two other cases $\tau' = (l_0, l_1 - 1)$ and $\tau' = (l_0 - 1, l_1)$ correspond to the same formulas, with different constants: $c_1^{\tau'\tau}$ and $c_2^{\tau'\tau}$.

APPENDIX II. INVARIANT WAVE EQUATIONS^{1,7}

Let us consider the first-order equation:

$$\sum_i L_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + i\chi\Psi = 0, \quad (A1)$$

where $\chi \in \mathbb{R}$, L_i are certain matrices which act on a space V , $\psi_{(x)}$ is a vector of V .

Following Gel'fand, Minlos, and Shapiro,⁷ we say that Eq. (A1) is invariant under a group of (transformations G , if its form is unchanged by the simultaneous transformations

$$x'_i = \sum_k g_{ki}x_k, \quad g \in G, \quad (A2)$$

$$\Psi'(x') = T_g\Psi(x), \quad (A3)$$

where $g \rightarrow T_g$ is a representation of the group G .

Now it is easily seen⁶ that this assumption implies the following condition for the L_i :

$$T_g L_i T_g^{-1} = \sum_k g_{ki} L_k. \quad (A4)$$

For $G = R$ the rotation group, $i, k = 1, 2, 3$. For $G = \mathcal{L}$ the Lorentz group, $i, k = 0, 1, 2, 3$. Then we can consider the condition equivalent to (4) on the Lie algebra, by putting

$$T_g = 1 + \epsilon A_g,$$

$$g(\epsilon) = 1 + \epsilon \delta, \quad \delta_{ii} = 0,$$

we have

$$[A_g, L_i] = \sum_k \delta_{ki} L_k. \quad (A5)$$

But (A5) means that, in case $G = R$, the set of L_i ($i = 1, 2, 3$) is isomorphic to D^1 as a G -module, and, in case $G = \mathcal{L}$, (A5) means that this set ($i = 0, 1, 2, 3$) is isomorphic to $D^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$.

In other words, finding the matrices L_i is equivalent to solving Eq. (1a) of the representation problem. We then recover the values of the possible L_i : they are given by the matrices T .

For example, the correspondence with the Gel'fand, Shapiro, and Minlos results is in the case $G = R$:

$$(L_+)_{ij} = T_{ij}(e_1^1),$$

$$(L_-)_{ij} = T_{ij}(e_{-1}^1),$$

$$(L_3)_{ij} = -T_{ij}(e_0^1),$$

thus explaining the "transition rules" for the matrices L_i , and the necessity of using a sum of irreducible representations of the group G , in order to have nonzero matrices L_i , i.e., a nontrivial invariant wave equation (1) must involve wavefunctions ψ which are defined on a sum of irreducible spaces.

